ENSAYO

SOBRE EL ESTUDIO TEÓRICO Y PRÁCTICO DE LOS CAMBIOS DE VÍAS

PRIMERA PARTE

CAMBIOS DE VÍAS CON CURVAS CIRCULARES

Objeto del cambio de vía.—Inútil sería decir lo que es y para qué sirve un cambio de vía: lo saben todos los que se ocupan de ferrocarriles.

Pero, hasta ahora, se ha considerado sólo el cambio de vía ordinario, con una de las vías en línea recta, como si este tipo de cambio fuera el solo posible. Por excepción, algunos cambios se colocaron con sus vías curvas, y muchas veces, salvo el caso de cambios simétricos, se hizo esto en contra de las órdenes recibidas, siendo la regla que un cambio de vía debe colocarse de aquel modo, decir con una via recta.

Además, un cambio no comprende solamente un cruzamiento, ó sapo, y agujos. Cierto es que estas son las partes principales é integrantes; pero habría el mismo error al considerar estas dos cosas como el cambio, que considerando en una tornamesa, solo el eje y las ruedas como la misma tornamesa, por el solo hecho que son las partes principales.

Para mí, un cambio de vía es un aparato único, entero, cuyas partes deben ser todas hechas en vista del cambio en el cual deben colocarse. Por lo delicado de este aparato y su uso frecuente debería ser el cambio de vía una «unidad» que colocaran los camineros de una sola pieza, por decirlo así, y no partes sueltas hechas en vista de cambios de vía en general, que se manejan por separadas, y se colocan muchas veces sin reglas fijas, por consiguiente según la idea ó el gusto de agentes más ó menos competentes.

El presente ensayo tiene por fin el dar las reglas, aproximativas ó exactas que puedan servir, ya sea para un estudio en general de colocación de vías en una estación, ya para la misma construcción del aparato.

Cruzamientos.—Los tipos de cruzamientos ó sapos adoptados en Chile, son los para los cuales se tiene

$$tj\beta = \frac{1}{6} \qquad tj\beta = \frac{1}{8} \qquad tj\beta = \frac{1}{10}$$

y que llaman comunmente cruzamiento de 1 por 6, 1 por 8, 1 por 10.

Corresponden respectivamente á los ángulos, de

$$10^\circ\ 49'\ 59'',14 \qquad 7^\circ\ 7'\ 30'',06 \qquad 5^\circ\ 42'\ 38'',13$$

Como más frecuentemente se usa el cruzamiento ó sapo de $\frac{1}{8}$, muchas veces, para evitar cálculos inútiles, haré aplicación, de las fórmulas sólo para dicho tipo, dejando al lector la tarea de aplicarlas á los otros tipos, si lo necesita, ó por gusto.

De cualquier tipo que sean, en fierro, acero ó fundición, así como en rieles juntados y remachados, están todos establecidos de tal modo que, entre la parte de atrás (para uno que mira desde las agujas hacia el sapo) (y, por consiguiente, la extremidad colocada del lado de las agujas) y la punta matemática, la sola de que debemos ocuparnos, tiene una parte recta variable en su largo, pero que no pasa de 0.^{m}60.

En el estudio de los cambios, despreciaré esta parte recta, y la consideraré como si la misma curva continuase hasta la punta matemática.

El error que proviene de esto es muy chico y el ángulo tiene por su valor (fig 1.)

$$\frac{0.60}{2} = R \text{ sen } \beta.$$

Siendo R el radio de la curva del cambio, y β el ángulo del sapo, así tendremos

$$\text{sen } \beta \text{ ó } \beta = \frac{0.30}{R}$$

Y para un radio solo de 100^{m} lo que no se ve nunca en la práctica, β es igual á 0.003, es decir, inferior, ó por lo más igual á las diferencias que se encuentran en el mismo montaje del aparato. Con más razón, entonces podemos despreciar esta pequeña recta, con radios de 200 y 300^{m} que son los usados más frecuentemente.

Del mismo modo, será absolutamente insignificante la diferencia que, por este hecho, habría en los largos de los cambios, siendo en este caso la diferencia entre el arco y su cuerda un infinitamente chico del 6.º orden.

Agujas. – Las agujas, en fierro ó en acero están colocadas de tal modo que hagan con el riel de la vía directa un ángulo α dado por

$$\text{sen } \alpha = \alpha = \frac{0.^{m}125}{4.^{m}877} = 0.0258$$

siendo 4.^{m}877 el largo de la aguja, y 0.125 la distancia (0.070

entre rieles y 0.055 el riel aguja en las líneas nuevas con rieles de 30 kilg. por metro) entre la pared interior del riel de la vía directa y la de la aguja.

En el estudio de los cambios, no se puede despreciar este ángulo. Además, es absolutamente necesario en la construcción del aparato, por ser la distancia de 0.07 destinada á dejar pasar las ruedas de los vehículos.

Esta particularidad deberá entonces intervenir en los cálculos, y traerá, como consecuencia, importantes correcciones.

Ancho de la vía ó trocha.—En todo lo que sigue, supondré la trocha de 1.^{m}68, y es esta misma cantidad la que debe entrar en los cálculos, por hacerse los contactos siempre por las paredes interiores de los rieles.

Me ocuparé primero de los cambios con las vías en curvas circulares, tipo solo usado hasta ahora. Después veré, de un modo sumario, si puede hacerse á los cambios aplicación de la teoría de las curvas de empalme parabólicas, limitándome, en este caso, al solo tipo de cambios con una vía recta.

FÓRMULAS GENERALES PARA EL CÁLCULO DE LOS CAMBIOS DE VÍA CON CURVAS CIRCULARES

Tomando la cuestión en toda su generalidad, y despreciando, por el momento, las partes rectas del cruzamiento y de las agujas, la cuestión es esta:

Dadas dos circunferencias concéntricas, buscar otra que corte las primeras según dos ángulos conocidos α y β.

Este problema no es otro que el de las ruedas hidráulicas, y las construcciones gráficas serían absolutamente las mismas. Aquí no las daré por ser cosa ya bien conocida, y principalmente por necesitar un dibujo demasiado grande, si se quiere conseguir la solución con bastante exactitud.

Mejor es tratar la cuestión por el cálculo.

Considerando (fig. 2) los dos triángulos oo'B y ooA, tendremos:

$$\overline{oo}'^2 = R'^2 + r^2 + 2R'r \cos \alpha$$

$$\overline{oo}'^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta$$

siendo R y R' los radios de las curvas concéntricas, y r el radio de la tercera circunferencia que buscamos.

Si se nota que hay dos soluciones (en realidad, hay 4, pero hacen dos grupos iguales) porque el centro puede estar del otro lado que el de las primeras curvas, podremos con toda generalidad

$$R'^2 + r^2 \mp 2R'r \cos \alpha = R^2 + r^2 \pm 2Rr \cos \beta$$

de donde

$$r = \frac{R'^2 - R^2}{2(\pm R' \cos \alpha \mp R \cos \beta)} \qquad (1)$$

Reemplazando R' por R + 2a, siendo 2a la trocha = 1.^{m}68, viene.

$$r = \frac{2(Ra + a^2}{R\ (\cos \alpha - \cos \beta) \pm 2a \ \cos \alpha} \qquad (2)$$

Es fácil, con esta fórmula, calcular r, siendo conocidos los ángulos α y β, y el radio R de la curva.

Si como caso particular se supone $R = \infty$ es decir si una de las vías es recta, tenemos:

$$r = \frac{2a}{\cos \alpha - \cos \beta}$$

Suponiendo α y β constantes, la relación (2) representa una hipérbola equilátera que es mui fácil construir. Podrían, con este gráfico conseguir r, dado R por sola lectura.

Se podría así trazar las tres hipérbolas correspondientes á los sapos de $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$, y $\frac{1}{10}$.

Este valor.

$$r = \frac{2a}{\cos\alpha - \cos\beta}$$

que llamamos R, que interviene mucho en nuestros cárculos hai que acordarse que es el valor del radio, cuando una de las vías es recta.

Pongamos entonces

$$R_1 = \frac{2a}{\cos\alpha - \cos\beta} \tag{3}$$

y, resolviendo respecto á cos β, viene, después de reemplazar en (2) y guardando sólo el signo +, para simplificar

$$r = \frac{(R+a)\,R_1}{R+R_1\cos\alpha}$$

ó, desarrollando

$$rR + rR_1\cos\alpha = RR_1 + aR_1$$

y, dividiendo todo por $RR_1\,r$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\cos\alpha = \frac{1}{r} + \frac{a}{Rr}$$

Considerando ahora que α es muy chico, y que más ó menos tenemos $\cos\alpha = 1$, y que, por otra parte, si se supone $R = 150^m$ (lo que da, como lo veremos luego, $r = 100^m$ más ó menos) el término $\frac{a}{Rr}$ igual á

$$\frac{0.84}{100 \times 150}$$

puede despreciarse respecto á $\frac{1}{R_1}$ y á $\frac{1}{R}$

Bastará entonces sólo la forma final en toda su generalidad

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R} \qquad (4)$$

fórmula que nos dice que, sensiblemente, la curvatura de la vía desviada es igual á la curvatura que tendría si fuese recta la vía principal, más ó menos la curvatura de la vía principal.

Esta fórmula, aunque aproximativa basta para un estudio general de colocación de vía á escala chica. Pero no puede ser suficiente cuando se quiere estudiar el cambio por él mismo, y trazar su dibujo á grande escala.

Correcciones á estas fórmulas.—Hemos, en efecto, supuesto que la curva alcanzaría hasta la punta de la aguja, lo que no es cierto, y en la parte donde se juntan el taco de la aguja y la curva sería el ángulo dado por (fig. 3.)

$$\frac{4.877}{2} = R \text{ sen } \alpha = R\,\alpha$$

de donde

$$\alpha = \frac{2.4385}{R}$$

y para que sea α inferior á 0.003 necesitaría un radio superior á 550 metros, lo que no es práctico.

Pero se puede, con algún trabajo, es verdad, corregir la fórmula (2), y proponer así la cuestión.

Dando una recta conocida (las agujas) y un punto A sobre esta recta (el taco de las agujas) trazar una circunferencia tangente en A á la recta, y que corte otra circunferencia dada, bajo el ángulo β.

Sean (fig. 4) p la distancia oA y y φ el ángulo oAo′, notando desde ahora que se puedan calcular directamente estas cantidades.

Los triángulos oBo′ y oAo′ dan como siempre

$$\overline{oo'}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta$$

$$\overline{oo'}^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos \varphi$$

de donde

$$R^2 - 2Rr \cos \alpha = p^2 - 2pr \cos \varphi$$

y

$$r = \frac{p^2 - R^2}{2(p \cos \varphi - R \cos \beta)} \qquad (5)$$

Para simplificar, sustituyamos R + K á p, tendremos:

$$r = \frac{2Kr + K^2}{2[R(\cos \varphi - \cos \beta + K \cos \varphi]} \qquad (6)$$

expresión análoga á (1) salvo que ha sido reemplazada a por K, y α por φ.

Esta fórmula es más exacta que (1) pero es de uso más difícil por el cálculo que debe hacerce ántes, de K y de φ.

Además, no permite el trazado simple de un gráfico por ser φ una función de R.

Tenemos en efecto (fig. 5).

$$\varphi = \alpha - \mu$$

$$\cos \varphi = (\alpha - \mu) = 1 - \frac{\alpha}{2} + \mu \ \alpha$$

con sólo tres términos en el desarrollo.

Por otra parte, despreciando la diferencia entre AB y AD, tenemos:

$$BD = \mu(R + 2a)$$

ó

$$4.877 = \mu(R + 1.68)$$

de donde

$$\mu = \frac{4.877}{R + 1.68}$$

Para el cálculo, se puede entonces buscar primeramente μ, después φ, y p; y en fin γ; pero, lo repito, no se puede hacer fácilmente una gráfica, sino solo cuando tendremos $\alpha = \varphi$, lo que hace volver á la fórmula (1) salvo el reemplazo de 2a por k.

Para el cálculo de K, tenemos con muy poca diferencia (fig. 6.)

$$k = 2a - 0.125 = 1.68 - 0.125 = 1^{m}555$$

Inconvenientes del método anterior.—El método anterior, que da á primera vista una solución general de la cuestión, tiene los inconvenientes siguientes:

1.° El radio R no corresponde, en la práctica, ni al radio interior, ni al radio exterior, sino mejor al radio medio.

2.° El valor de r que hemos encontrado corresponde al radio exterior, de donde nace anomalía y confusión.

Mejor sería entonces establecer una fórmula en la cual R y r serían los radios medios, lo que se puede fácilmente con la sola inspección de la fig. 7.

Los dos triángulos oAo′ y oBo′ dan

$$\overline{oo}'^2 = (R-a)^2 + (r+a)^2 - 2\,(R-a)\,(r+a)\cos\beta$$

$$\overline{oo}'^2 = (R+a)^2 + (r+a)^2 - 2\,(R+a)\,(r+a)\cos\alpha$$

de donde

$$(R-a)^2 - 2\,(R-a)\,(r+a)\cos\beta = (R+a)^2 - 2(R+a)(r+a)\cos\alpha$$

y, desarrollando y resolviendo respecto γ,

$$\gamma = \frac{2aR + a\,[\,R\,(\cos\beta - \cos\alpha) - a\,(\cos\beta + \cos\alpha\,)\,]}{R\,(\cos\alpha - \cos\beta) + a\,(\cos\alpha + \cos\beta\,)} \qquad (7)$$

fórmula que representa, siendo α y β constante, una hipérbola equilátera que se puede fácilmente trazar.

Para que este $r = \infty$, es decir, para que una vía esté recta, se debe tener:

$$R\,(\cos\alpha - \cos\beta\,) + a\,(\cos\beta + \cos\alpha) = 0$$

de donde

$$R = \frac{\alpha\,(\cos\beta + \cos\alpha)}{\cos\beta - \cos\alpha} = 2a\ \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\ \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Llamemos R_1 este valor particular de R, tenemos:

$$R_1 = a\,\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

de donde

$$\cos\beta - \cos\alpha = \frac{a}{R_1}(\cos\beta + \cos\alpha$$

y la fórmula (7) se convierte en

$$r = \frac{2aR + a\left[\frac{aR}{R_1}(\cos\alpha + \cos\beta) - a(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}{\frac{aR}{R_1}(\cos\alpha + \cos\beta) + a(\cos\alpha + \cos\beta)}$$

$$Rr(\cos\alpha + \cos\beta) - R_1\ r(\cos\alpha + \cos\beta) = 2RR_1 + a(R - R_1)(\cos\alpha + \cos\beta)$$

y en fin, dividiendo todo por $RR_1\ r$,

$$\frac{1}{R_1}(\cos\alpha + \cos\beta) - \frac{1}{R}(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{2}{r} + \frac{a}{RR_1 r}(R - R\ )(\cos\alpha + \cos\beta)$$

Aquí haremos las mismas consideraciones qne anteriormente, es decir, que se puede despreciar el término $\frac{a}{RR_1 r}$ por ser muy chico respecto á los otros. Nos quedará entonces como fórmula general

$$\frac{2}{r} = \left(\frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_1}\right)(\cos\alpha + \cos\beta) \qquad (8)$$

es decir que: el doble de la curvatura de la vía desviada es igual á la suma de los dos cosen. de los ángulos del sapo y de las agujas multiplicada por la diferencia ó la suma de curvaturas de la vía principal y lo que sería si fuese recta la otra.

Si como caso particular ponemos $\cos\alpha = 1$ y $\cos\beta = 1$, lo que equivale á igualar á o, α y β tendremos la fórmula (4), ya establecida

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R}$$

Interpretación gráfica de la fórmula $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R}$.—La fórmula (4) da lugar á una observación curiosa, y á una construcción gráfica muy sencilla, aunque sólo aproximativa.

Escribiéndola bajo la forma

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1}$$

y comparándola con la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

establecida en física elemental para los espejos esféricos cóncavos, se ve que dando á r, R y R_1 las mismas aceptaciones que p, p' y f, podrá usarse la misma construcción.

Por ejemplo, (fig. 8), en escala bastante grande, y con radio igual á 2R, se traza un arco de círculo de pequeña amplitud; tomando después AP = R trazando una recta cualquiera PM, juntando MF, (siendo AF la mitad de Ao) y trazando en fin el ángulo oM P' = oMP, se determina el punto P', y la distancia AP' corresponde á r, en la misma escala.

Para las curvas de sentido inverso para las cuales la fórmula es

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}$$

se haría la construcción con un espejo esférico convexo.

Fórmula de los radios medios, con la parte recta de las agujas. —Si se quiere establecer una fórmula análoga á (6) tomando en cuenta los radios medios, y las partes rectas de las agujas, se llega á una dificultad práctica llamada «chevauchement» de las puntas de las agujas, del cual hablaré mas allá.

Otro modo de cálculo.—Otras consideraciones de orden bien diferente permiten el cálculo de los cambios, y dan más ó menos las mismaś fórmulas, pero, se llega á más aproximación y á gráficos de construcción más fácil.

Me he inspirado para los principios de este método, de lo expuesto por el señor Daveluy (Revue des chennirs de fer, 3 Mars 1882 et 1.º Jauvier 1883.) Inspector principal á la C.ª París Lyon Mediterránea.

Hay muy poca diferencia entre una vía en curva y un polígono cuyos lados serían los rieles. Para las curvas de radio grande, 3,000 á 6,000 metros, no hay necesidad casi de curvar los rieles cuando éstos no pasan de 7 á 8 metros de largo, siendo la flecha de $1^{m}½$ más ó menos. Pero, en las curvas de radios menores, 200 á 500 metros y hasta 1,000 metros principalmente con los rieles de 8 á 10 metros que se van adoptando hoy, hay que dar á estos rieles una curvatura muchas veces bastante grande. Pero, sin inconveniente ninguno, podemos considerar las curvas de las vías como polígonos cuyos lados serían los rieles. La curva teórica de la vía será, en este caso la circunferencia tangente interiormente á este polígono; (fig. 9.)

Pero, si se puede dar á los rieles, sea antes de su colocación, sea ya colocados en la vía, la curvatura que necesiten, esto no se puede hacer para las agujas ni para los rieles contragujas. Será entonces menester, en dichas partes, conservar el polígono, respetando aún en esto los ángulos propios de la misma construcción del cambio.

Además, notemos que, siendo la curva teórica tangente interiormente al polígono de los rieles, la curva teórica de la vía desviada del cambio será también tangente á la primera así como lo indica la fig. 12.

Método poligonal de cálculo de los cambios.—Es doble enton ces la cuestión:

1.° Buscar una circunferencia que, tangente á otra, corte una tercera según un ángulo dado.

Esta parte depende sólo del análisis, y puede resolverse fácilmente.

2.° Modificar el punto de juntura según las sujeciones prácticas de la forma de las agujas, cuya forma general no puede modificarse, cualquier que sea el cambio.

Seguiré despreciando, en todo lo que sigue, la parte recta de 0^m60 más ó menos, incluído en los cruzamientos.

1.ª parte.—Fórmulas analíticas de los cambios.—Se da dos circunferencias concéntricas, distantes una de otra de $2a = 1^m68$. Buscar una tercera circunferencia tangente á una de ellas, y que corte la otra según un ángulo β, que es el del cruzamiento.

Así propuesta la cuestión, tendría su solución inmediata en la fórmula (2) ya establecida, y en la fórmula (7) haciendo en esta $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$.

Pero se puede calcular directamente de un modo muy sencillo.

Sea (fig. 13) O y O′ los centros de los dos grupos de circunferencias concéntricas. Sean $oB = R$, $o'c = r$ y $2a$ la trocha. Por consiguiente $BB_1 = a$ $BC_1 = a$. Trazemos $o'M$ perpendicular à oB_1. El triángulo rectángulo $o'Mo$, nos da

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2$$

Por otra parte tenemos

$$oo' = R - r$$

$$oM = R - a - (r + a) \cos \beta$$

$$o'M = (r + a) \text{ sen } \beta$$

de donde

$$(R - r)^2 = [R - a - (r + a) \cos \beta]^2 + (a + a)^2 \text{ sen}^2 \beta$$

Desarrollando y resolviendo respecto á R, tenemos

$$R=\frac{a(r+a(1+\cos\beta)}{(r+a)\cos\beta-(r-a)}$$

Tendremos $R=\infty$ para

$$(r+a)\cos\beta-(r-a)=0$$

de donde despejando r

$$r=a\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

valor que no hace nulo al numerador.

Una de las vías está entonces en línea recta. Para mayor claridad hagamos $R=x$ $r=y$, y demos á la fórmula (9) la forma clásica tendremos:

$$x\,y-a\frac{1+\cos\beta}{1+\cos\beta}x+a\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}y+a^2\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}=0 \qquad (10)$$

ecuación de una hipérbola equilátera cuyas azíntotas son las rectas paralelas á los ejes coordenadas y á distancias iguales á

$$x=a\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta} \qquad y=a\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

es decir los mismos valores de r que hacen á $R=\infty$ lo que es natural.

El resultado de la aplicación de estos cálculos á los cruzamientos de $\frac{1}{8}$ es:

Tenemos en este caso tang. $\beta\,\frac{1}{8}=0.125$ $\cos\beta=099,227$, y la ecuación (10) se convierte en

$$x\,y-216.49\,x+216.49\,y+181.85=0 \qquad (11)$$

siendo 216.49 el valor de $r=a\,\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$

es decir el valor límite de una vía cuando la otra es recta.

Esta curva la tracé para acompañar esta nota, á la escala de $0.^m0001$ por metro, y luego daré por algunos ejemplos el modo de usarla.

Pero desde ahora se puede notar algunas particularidades:

1.º La parte de la curva comprendida entre $x = 0$, $x = 100^m$ no sirve nunca, siendo peligroso y aún imposible en práctica, hacer un cambio de radio tan chico;

2.º Los cambios simétricos, es decir los compuestos de dos curvas de radio igual, se encuentran trazando el eje transversal de la hipérbola, y la misma intersección de este eje con la curva, da

$$x = -y \qquad ó \qquad y = -x$$

es decir que las curvas son de sentido contrario, lo que debe ser, y es, en este caso, el sólo valor aceptable es

$$R = r = y = 432.^m55$$

Podemos ver ahora el valor numérico de las aproximaciones hechas precedentemente en las leyes establecidas de las curvaturas.

Llamando siempre R_1 el valor particular

$$R = a\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

podemos poner la ecuación (9) bajo la forma logarítmica. Tenemos pues

$$\cos\beta = \frac{R - {}_1a}{R_1 + a}$$

y la fórmula (9) se convierte en

$$R = \frac{(R+a)\ R_1}{R_1 - r}$$

ó, desarrollando y multiplicando todo por

$\frac{R_1 - R}{RR_1 r}$ nos queda

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1} - \frac{a}{RR_1} = 0$$

y despreciando $\frac{a}{RR_1}$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = 0$$

ó

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R}$$

Haciendo $R = x$ $r = y$ $R_1 = 216.49$ tenemos la ecuación

$$xy - 216.49\,x + 216.49\,y = 0 \qquad (13)$$

es decir la hipérbola anterior movida hacía el origen de $x = y = 0.84$. El error, como se ve, es constante é insignificante, y se podría también usar esta segunda hipérbola, aunque no la hemos trazado.

Se ve que tomando, ya sea la ecuación entera, sea la reducida á la forma más sencilla los resultados gráficos son casi los mismos, y en cálculo de un cambio en escala chica, se podrá tomar indiferentemente una ú otra fórmula (13) ú (11.)

Largo de los cambios.—Voy ahora á tratar de la cuestión muy importante del largo de los cambios. La consideración de la fig. 10 indica que se debe calcular: 1.º el ángulo c, del triángulo Boo'; después φ del triángulo Aoo'. Se deducirá el ángulo BoM quien, conociendo el radio, dará el largo.

Este cálculo muy largo y penoso, puede felizmente ahorrarse por consideraciones muy sencillas.

El largo del cambio, de la punta teórica de las agujas, á la punta matemática del cruzamiento, es en la vía directa (figura 14)

$$\alpha R,$$

y, en la vía desviada

$$(\beta+\alpha)\, r \ \text{ó}\ (\beta-\alpha)\, r,$$

según estén las vías en el mismo sentido ó no.

El triángulo oBo′ da

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (a+\beta)}=\frac{r+a}{R-a}$$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta}=\frac{r+a}{R-r}$$

y, en el segundo caso

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (\beta-\alpha)}=\frac{r+a}{R+a}$$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta}=\frac{r+a}{R+r}$$

Como siempre el desarrollo de las curvas de los cambios es chico respecto á los radios, los ángulos α, β y $\beta+\alpha$ son bastante chicos, y se puede escribir despreciando también á respecto R ó r.

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{r}{R}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{R-r}$$

$$\frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{r}{R}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{R-r}$$

relaciones que dan

$$\alpha R = (\beta - \alpha)\, r = (\beta + \alpha)\, r \qquad (14)$$

lo que demuestra que el largo desarrollado de un cambio, es absolutamente lo mismo, que lo midan en la vía directa ó en la vía desviada, y cualquieras que sean, en cada caso, los largos de los radios.

Basta entonces, medir este largo en un sólo caso, el más sencillo, cuando una de las vías es recta y para un cambio con sapo de $\frac{1}{8}$ y un radio de 216^m49. Tendremos:

$$l^2 = R^2 - (R - 2a)^2$$

$$= 26^m91$$

largo teórico medido, medido según el eje de las vías.

Cambia naturalmente el largo si se lo mide según una tangente común al origen de las curvas. En este caso el largo será (fig. 15) representado por BC, sea μ el ángulo del centro, R el radio, tenemos:

$$BC = R \text{ sen } \mu$$

y

$$\mu = \frac{l}{R}$$

de donde

$$BC = R \text{ sen} \frac{l}{R}$$

Haciendo $BC = y$ i $R = x$, tendremos la ecuación general,

$$y = x \text{ sen} \frac{l}{x} = x \text{ sen } \frac{26.91}{x} \qquad (15)$$

que dará los largos medidos según una tangente común al origen.

La ecuación (15) la trazé en el depurado correspondiente á los cruzamientos de $\frac{1}{8}$.

Se puede establecer la fórmula de los largos de los cambios bajo otra forma más sencilla y tan exacta.

$$\text{Sea (fig. 16) } AD = l = DE + EA$$

Tenemos también

$$DE = EC = EA$$

de donde

$$l = 2DE = 2CE$$

Por otra parte

$$CE = a \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}$$

de donde

$$l = \frac{2a}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta} \qquad (16)$$

Pero como siendo β muy chico tenemos con muy poca diferencia $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$,

tenemos

$$l = \frac{2a}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta} = \frac{4a}{\operatorname{tg}\beta}$$

y para un cambio con cruzamiento de $\frac{1}{8}$ tendremos:

$$l = 4 \times 0.84 \times 8 = 26.88$$

Por otra parte tenemos

$$l = R\,\beta.$$

de donde

$$R = \frac{l}{\beta}$$

ó, todavía

$$OA = AE \frac{1}{tg \frac{1}{2} \beta} = \frac{a}{tg^2 \frac{1}{2} \beta} = R$$

Se puede entonces calcular el largo y el radio de un modo muy sencillo, conociendo el tipo del cruzamiento.

Haciendo los cálculos para un sapo de $\frac{1}{8}$ encuentro

$$l = 26.88 \qquad R = 216.71$$

valores ya encontrados aproximativamente.

En el depurado, hemos colocado los primeros valores $l = 26.91$ $R = 216.49$.

En el caso particular de los sapos de $\frac{1}{8}$, la ecuación (15) es

$$y = x \text{ sen } \frac{26.91}{x} \qquad (15)$$

y la curva que representa esta ecuación fué trazada en la misma hoja de dibujo que la (10) ú (11) con los valores de x correspondientes á los de la hipérbola, para facilitar las lecturas.

Desprecié, naturalmente, trazarla entre $x = 0$ y $x = 100$, por ser inútil esta parte de la curva.

El valor límite de l ó y es 26.91, correspondiente á $x = \infty$, es decir, á una vía recta. La recta $y = 26.91$ es asintota.

Observaciones importantes.—La fórmula (14) establecida anteriormente

$$\alpha R = (\beta - \alpha)\, r = (\beta + \alpha)\, r$$

muestra que el largo del cambio no varía. Esto da lugar á una observación importante en práctica.

Si un cambio no varía en su largo, se pasan las cosas lo mismo que, tomando el cambio hecho con una de sus vías recta, lo enrollasen según otra curva determinada. Esto es la teoría, y en práctica, casi se puede hacer así muchas veces.

En efecto, el depurado de los largos de los cambios muestra que varía muy poco el largo teórico de la punta del sapo á la punta de la aguja, cuando se da variaciones bastante grandes á los radios. Por consiguiente dejando un poco sueltos los pernos de las eclisas y los clavos de algunos durmientes, se podrá en muchos casos, con el chuso dar á la totalidad del aparato la curva que se necesita, si naturalmente la diferencia entre el radio primitivo y el final no es muy grande. No habrá necesidad de sacar enteramente el cambio para colocarlo de nuevo, ú otro según otro dibujo.

Esto tiene su importancia por hacer notar, en casi todos los casos que la cuestión de colocación y de modficación de un cambio no será sino cosa de esmero, y no de construcciones especiales.

Correcciones para pasar de la teoría á la práctica.—Hasta ahora hemos hablado de los radios y de los largos teóricos. Voy r ver ahora el largo práctico del cambio, tomando en consideración las agujas, su forma y su modo forzoso de colocación.

Las vías en curva, así como lo dije al principio, pueden considerarse como polígonos, cuyos lados están tangente exteriormente á las curvas teóricas, siendo dichos lados, los rieles ó partes de rieles. Pero, en las agujas, el lado del polígono es forzosamente la aguja entera, por no poder torserse dicho aparato.

El riel contra-aguja y la aguja tomarán entonces la posición figurada en la figura 17.

(Continuará.)

M. Dorlhiac