Año II **15 de Julio de 1902** **Núm. 7**

ANALES
DEL
INSTITUTO DE INJENIEROS DE CHILE

EMPUJE DE LAS TIERRAS

POR

MANUEL TRUCCO

(Injeniero Civil)

1. LEI DE VARIACION DEL EMPUJE EN FUNCION DE LA ALTURA

Nos ocuparemos del caso de terraplen limitado superiormente por un plano i consideraremos así mismo, por ahora, plano tambien el paramento interior del muro.

En nuestro estudio anterior (1) sobre el *Empuje de las tierras* espusimos que la espresion analítica de dicho empuje es:

$$Q = P \frac{\text{sen}\,(\alpha - \phi)}{\text{sen}\,(\beta + \phi + \phi')} \qquad \text{(I)}$$

en la cual:

α=ángulo del plano de derrumbe del prisma de máximo empuje con el horizonte;
β=áng. de dicho plano de derrumbe con el paramento interior del muro;
ϕ=áng. de rozamiento de tierras sobre tierras;
ϕ'=áng. de rozamiento de tierras sobre el muro;
ρ=peso del prisma de máximo empuje con sus sobrecargas.

En el mismo estudio, indicamos ademas la construccion gráfica que determina la posicion del plano de derrumbe del prisma de máximo empuje.

Esa construccion jeométrica hace ver que para un mismo muro i un mismo terraplen, son paralelos los planos de derrumbe que corresponden a diversas alturas del muro, medidas a partir de su coronamiento, lo que equivale a decir que los ángulos α i β permanecen constantes para las diversas alturas consideradas.

Representando, pues, por C ese valor constante de la fraccion de la fórmula (I) podemos escribir:

$$Q = C\,P$$

Hagamos:

P' = peso *propio* del prisma de tierras
P''=peso *de las sobrecargas* que le corresponden.

(1) Véase ANALES DEL INSTITUTO DE INJENIEROS DE CHILE, año 1902, páj. 55.

Entónces:

$$Q = C\,(P' + P'')$$

Si haciendo $P'' = O$, tendremos el empuje $Q' = C\,P'$ debido *solamente a las tierras.*

I haciendo $P' = O$ tendremos el empuje $Q'' = C\,P''$ debido *únicamente a las sobrecargas.*

Segun ésto:

$$Q = Q' + Q''$$

Si estas notaciones corresponden a la altura total h del muro (fig. 1), para una altura parcial cualquiera x tendríamos:

$$Q_x = Q'_x + Q''_x \qquad Q'_x = C\,P'_x \qquad Q''_x + C\,P''$$

De modo, que se obtiene:

$$\frac{Q'}{Q'_x} = \frac{P'}{P'_x} = \frac{h^2}{x^2} \tag{1}$$

O sea:

$$Q'_x = \frac{Q'}{h^2} x^2,$$

Que es la ecuacion de una parábola de eje horizontal i cuyo vértice está en b (fig. 1).

Trazando, pues, la vertical $b\,a$, de lonjitud igual a la altura h del muro, i tomando horizontalmente $a\,q' = Q'$, será fácil dibujar la parábola bq'_1q'.

Si se quiere, por ejemplo, determinar aisladamente el punto q'_1 de la parábola, o sea el empuje Q'_1 que las *tierras solas* ejercen en $B\,B$, bastará trazar $b\,q'$ i por el punto m, en que esta recta corta a la horizontal B , bajar la vertical $m\,n$ hasta cortar en n a la horizontal $a\,q'$. La recta $b\,n$ nos da, en su interseccion q'_1 con la horizontal de B_1, el punto buscado, i en $b_1\,q'_1$ nos da el valor de Q'_1.

En efecto, se tiene:

$$b_1\,q'_1 : a\,n = x : h$$
$$a\,q' : b_1\,m = h : x$$

De la última de estas proporciones, se deduce:

$$b_1 m = \frac{a\,q' \times x}{h}$$

O sea:

$$b_1\,m = a\,n = Q'\frac{x}{h}$$

Introduciendo este valor en la primera proporcion, tendremos:

$$b_1\,q'_1 = Q'\frac{x^2}{h^2}$$

Es igualmente sencillo determinar la lei de variaciones de los empujes Q''_x, en funcion de la altura.

En efecto, tenemos (fig. 1):

$$Q'' : Q''_x = P'' : P''_x = B\,X : B\,X_1 = h : x$$

De donde:

$$Q''_x = \frac{Q''}{h} x \qquad (2)$$

Que es la ecuacion de la recta $b\,q''$, para la cual $a\,q'' = Q''$.

Así, pues, el empuje total en $B\,B_1$, debido a las tierras i a sus sobrecargas, será:

$$Q_1 = Q'_1 + Q''_1 = q'_1\,b_1 + b_1\,q''_1 = q'_1\,q''_1$$

2. Las consideraciones anteriores hacen ver que será fácil trazar las *curvas de las variaciones de los empujes*, siempre que conozcamos dos valores de estos empujes, por ejemplo los valores Q' i Q'' que corresponden a la altura total del muro.

Sin embargo, si se procede gráficamente por lo jeneral no determinaremos directamente los valores Q' i Q'' sino el valor $Q = Q' + Q''$.

Consideremos este caso.

Tenemos:

$$Q' = C\,P' \qquad\qquad Q'' = C\,P''$$

Como P' es el peso del prisma $A\,B\,X$ de tierras, i P'' es el peso de las sobrecargas que le corresponden, trasformando estas sobrecargas en una capa equitativa de tierras, tendremos:

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{P'}{P''} = \frac{\frac{1}{2}\,B\,X \times A\,N}{B\,X \times e}$$

De donde:

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{A\,N}{2e} = \frac{h}{h'} \qquad (3)$$

De modo que tomando $q'\,q'' = Q$ (1), bastará dividir esta lonjitud (como se indica en la fig. 1) en la razon $h : h'$ para tener el punto a por el cual deberá trazarse el eje $a\,b$.

3. *Trapecio de los empujes.*—De la relacion se deduce otro procedimiento para espresar gráficamente la lei de variacion de los empujes Q'_x debidos únicamente a las tierras.

Supongamos, en efecto, que el área del triángulo rectángulo $b'\,a'\,c'$, de altura $b'\,a'$ igual a h, represente la seccion del prisma de tierras cuyo peso es igual al empuje Q' para el muro total $A\,B$. Inmediatamente se deducirá de aquí que el empuje Q'_x, que correspon-

(1) En este caso, si se procede gráficamente, es cómodo determinar Q por el procedimiento que hemos indicado en los ANALES DEL INSTITUTO DE INJENIEROS DE CHILE, 1902, páj. 60, § 5, a. Debemos observar que en ese estudio se deslizaron algunos errores en la impresion, principalmente numéricos, fáciles de reconocer i que no afectan a las conclusiones. Así, los muros considerados en las aplicaciones del § 5 son de 10 metros de altura (i no de 5 m.) segun lo indican tambien las escalas de las figuras. Asimismo, el espesor $2\,l$ es igual a $N\,N'$ i, solo por las condiciones particulares de los casos estudiados, es tambien sensiblemente igual a la distancia vertical h'. Son con estos datos con los que se trazó el depurado orijinal i con los que se obtiene $Q_{máx.} = 33$ t.

de a la porcion $B\,B_1$ de muro, estará representado por el peso del prisma $b'\,c'\,b'_1$; puesto que si designamos por S i s respectivamente las superficies de esos triángulos, para un metro corrido se verifica (siendo π' el peso específico de las tierras):

$$\frac{\pi'\,S}{\pi'\,s}=\frac{h^2}{x^2}$$

I como, por hipótesis, $\pi'\,S=Q'$, obtenemos:

$$\pi'\,s=\frac{Q'}{h^2}x$$

Lo que, segun la relacion (1), demuestra que el triángulo $b'\,c'\,b'_1$, de altura $b'\,b'_1=x$ representa la base del prisma de tierras cuyo peso es igual al empuje sobre $B\,B_1$.

De la misma manera, supongamos que el empuje Q'' debido solo a las sobrecargas, esté representado por el peso del prisma de tierras que tiene por base al rectángulo $b''\,b'\,a'\,c''$ para la altura total del muro. Segun esto, el empuje $Q''x$ quedará representado por el peso del prisma de tierras cuya seccion es el rectángulo $b''\,b'\,b'_1\,c''_1$ en el cual $b'\,b'_1=x$, puesto que se satisface la relacion (2).

La figurra $b'b''\,c''c'$ es la *superficie representativa de los empujes totales* Q i se la designa jeneralmente con el nombre de *trapecio de los empujes.*

Luego, segun la construccion anterior, *el empuje sobre un muro de l metros de lonjitud es igual al peso de un prisma de tierra de l metros de altura i cuya base es el trapecio de empuje correspondiente.*

En los cálculos, como se sabe, en jeneral basta considerar $l=1$ m.

CONSTRUCCION DEL TRAPECIO DE LOS EMPUJES

4. Sea el muro AB (fig. 2.)

Determinemos la posicion del plano de derrumbe AX por el procedimiento gráfico ya esplicado (3); tracemos la línea de la sobrecarga doble, la recta $B'Z'=z$ paralela a AL i la recta $XY=y$ perpendicular a AT.

Así se tiene:

$$Q_{máx.}=\frac{\pi'}{2}\,y.z.$$

Esta espresion nos indica que el $Q_{máx.}$ total es igual al peso de un prisma de tierras cuya seccion es un triángulo rectángulo que tiene por catetos a y i z. Este triángulo,

(1) V. ANALES citados, páj. 58, § 3.

(2) La lonjitud y podria tambien obtenerse en la perpendicular trazada desde B a la paralela a $A\,T$ que pasa por Z (siendo $B\,Z$ paralela a $A\,L$).

(3) En efecto, hemos demostrado (ANALES citados, páj. 62, § 5. *b)* que

$$Q_{máx.}=\frac{\pi'}{2}\times B'\,Z'\times B\,Z\times \text{sen}\,(\phi+\gamma)$$

i se ve que en realidad

$$y=B\,Z\times \text{sen}\,(\phi+\gamma)$$

que tiene a y por altura, tendrá por base a $z = B' Z'$ cuando hai sobrecargas; pero si éstas no existen la base de dichos triángulos será $z_0 = B Z$. Luego el empuje Q' debido a las tierras solas quedará representado por el triángnlo rectángulo cuyos catetos son y i $z_0 = B Z$.

Tomemos, pues, $a' m = B Z$ i $a' n = y$. Trasformemos este triángulo $a' n m$ en otro equivalente de altura $h = a' b.'$ Para esto, tracemos $b' m$; despues $n c'$ paralela a $b' m$; i por fin $b' c.'$ El triángulo $b' c' a'$ es equivalente al $a' m n$ i representa el empuje Q' debido a las tierras solas para todo el muro.

El empuje $Q,''$ debido a las sobrecargas, estará representado por un triángulo cuya altura es y i cuya base es $B' Z' - B Z$. En consecuencia, si tomamos $m m' = B' Z'$ i trazamos $n m,'$ el triángulo $n a' m'$ será la base del prisma cuyo peso es igual a $Q.''$ Como ántes, trasformaremos este triángulo en su equivalente $a' b' i$; finalmente, este triángulo lo trasformaremos en el rectángulo $a' b' b'' c,''$ tomando $a' c''$ igual a la mitad de $a' i$, i éste será el rectángulo de los empujes $Q.''$

5. Este mismo rectángulo puede construirse mas rápidamente como sigue: construido ya el triángulo $a' b' c,'$ que representa a $Q,'$ bastará prolongar $c' b'$ hasta encontrar en u a la horizontal $t u$, que equidista de B i de $B,'$ para tener en la vertical que pasa por u a la recta $b'' c''$ que determina el rectángulo buscado.

En efecto, tenemos:

$$Q' = \pi' \times \frac{1}{2} h \times a' c'$$

$$Q'' = \pi' \times h \times a' c''$$

o sea:

$$\frac{a' c'}{a' c''} = 2 \frac{Q'}{Q''}$$

Pero segun la relacion podemos escribir:

$$2 \frac{Q'}{Q''} = \frac{h}{\frac{h'}{2}}$$

Esto equivale tambien a tomar en el triángulo $A U U_1$ (fig. 6 de los ANALES ya citados) a $z = A U'$ como base: entónces la altura será y.

La fórmula $Q = \frac{\pi'}{2} y . z$, que hemos dado, es pues, jeneral, existan o no existan sobrecargas uniformemente repartidas, solo que cuando no hai sobrecargas $B' Z'$ se confunde con $B Z$; es decir que en este caso se tendrá $z = z_0 = B Z$, no modificándose y.

No deja de ser estraño que *Rebhann*, que dió la misma fórmula monomia $Q = \frac{\pi'}{2} y . z_0$ para cuando no hai sobrecargas, emplee, cuando las hai, la espresion binomia $Q = \frac{1}{2} \left[\pi' + \frac{2 p}{H'} \right] y . z_0$, en la cual p es la sobrecarga por $m.^2$ i H' es la lonjitud $A N$ de la perpendicular trazada desde A a $B X$. V. MULLER-BRESLAU, *Statique Graphique* trad. par *T. Seyrig;* HUGUENIN. *Aide Mémoire*, etc.)

Introduciendo, como lo hemos hecho nosotros, la recta $B' Z' = z$, la fórmula monomia, segun se ha visto, es jeneral, i es indudable que simplifica la solucion. Obteniéndose así resultados tan sencillos es, pues, de estrañarse de no ver figurar dicha recta, u otra que tenga igual objeto en Rebhann i demas autores que se han ocupado de simplificar estas construcciones gráficas.

Luego debe verificarse:

$$\frac{a' c'}{a' c''} = \frac{h}{\frac{h'}{2}}$$

Condicion que queda satisfecha con la construccion sencillísima que proponemos.

6. Todavía se puede simplificar mas aun la construccion del trapecio de los empujes.

Segun el párrafo anterior, vemos que basta solo construir el triángulo $a' b' c'$ para que quede determinado tambien el rectángulo $a' b' b'' c''$ que corresponde a las sobrecargas.

A su vez dicho triángulo queda determinado conociendo el valor de la base $b'_1 c'_1$ que corresponde a una altura cualquiera x del muro. En las tablas que hemos calculado, i que damos mas adelante, se encuentran los valores K de la base del triángulo de empuje que corresponden a una altura $x = \frac{1}{2}$ del muro, para los casos de mas frecuente aplicacion. La base $a' c'$ de dicho triangulo para una altura h del muro, se obtendrá multiplicando por $2 h$ el valor K dado por la tabla para el caso de que se trata.

APLICACIONES

7. *Verificacion de la estabilidad del muro indicado por la fig. 3*

El muro tiene una altura total de 10 cm. hasta el plano de la fundacion.

El trozo superior es de 5 metros de altura, i su paramento interior está en talud de ¼. El ancho en el coronamiento es de 1.75 m.

El trozo inferior tiene sus paramentos verticales. La zarpa tiene una saliente $F M$ de 0.50 m. i un espesor de 1 m.

La albañilería del muro es de bolones, con un peso de $\pi = 2400$ k. por m.^{3}

El terraplen termina superiormente por un plano horizontal i el talud natural de las tierras tiene una inclinacion $\phi = 35°$. El peso de las tierras es de $\pi' = 1600$ k. por m.^{3}

Las sobrecargas uniformemente repartidas son de $\pi'' = 2000$ k. por m.^{2}

Para verificar la estabilidad del muro por medio de la curva de los centros de presiones, hemos dividido el macizo en tres trozos, considerando las juntas $E B$ i $F F'$, trazadas en donde hai cambio brusco de la seccion del muro. Para cada uno de estos trozos necesítase determinar los esfuerzos que sobre ellos actúan.

Estos esfuerzos son el empuje de las tierras i el peso propio de las albañilerías.

a) *Empuje de las tierras.*—El paramento interior $A B C$ del muro (fig. 3) es poligonal. En este caso, para determinar el empuje de las tierras se suele sustituir el paramento poligonal por otro paramento rectilíneo intermedio. Tambien pueden emplearse procedimientos mas o ménos laboriosos, que dan directamente los empujes máximos soportados por cada elemento plano $A B$ i $B C$. (1)

Vamos a esponer el procedimiento, bastante espedito, adoptado por Müller-Breslau, algunas de cuyas construcciones simplificaremos.

(1) Véase KONING, *Curso de Resistencia de materiales profesado en la Universidad de Chile.*

Con tal objeto, determinaremos el prisma de máximo empuje (fig. 3 a) para el paramento $B\,C$, en talud de ¼, sin considerar todavía las sobrecargas.

El empuje máximo total sobre $B\,C$, será (fig. 3 a) para las tierras solas:

$$Q_{BC} = \frac{\pi'\, z_0\, y}{2}$$

Construiremos en $c'\,o'\,b$ (fig. 3 c) el triángulo de empuje correspondiente.

Para ésto tomaremos: $o'\,b$ igual a la altura $B\,A'$ del trozo $E\,C$ de muro, $b\,n = y$ i $b\,m = z_0$.

Fijaremos el punto c' trazando por n la paralela a $o'\,m$ (1). La recta $o'\,c'$ nos completa el triángulo $o'c'b$, que representa el empuje de las tierras, sin sobrecargas, sobre el paramento $C\,B$ del muro (§ § 3 i 4).

Para hacer intervenir tambien las sobrecargas de 2,000 kg. por metro cuadrado, trasformemos esta sobrecarga en una capa equivalente de tierras, cuyo espesor e será:

$$e = 2000 : 1600 = 1{,}25 \text{ m.}$$

Tracemos la horizontal $t\,u$ a 1,25 m. de distancia de o' i prolonguemos el lado $c'\,o'$ del triángulo de empuje hasta cortar en u a dicha horizontal $t\,u$. La vertical $c\,c''$, que pasa por u, nos determína el trapecio $c'\,o'\,c\,c''$, que es el trapecio de los empujes *totales* soportados por $B\,C$ (§ 5).

De la misma manera se procede para el trozo $A\,E$ de paramento vertical.

Supongamos el paramento vertical $A\,A'$. Construyamos para este paramento el depurado 3 b que nos da los elementos z'_0 e y' que nos permiten construir el triángulo $q'\,o'\,o$ de los empujes soportados por $A\,A'$ bajo la accion de las tierras solas (2). Con la construccion de ese triángulo queda determinado tambien el trapecio $q'\,o'\,a'\,q''$ de los empujes *totales* para el mismo paramento $A\,A'$.

La superficie representativa de los empujes totales (de las tierras i sus sobrecargas) para el paramento poligonal $A\,B\,C$ es la que se ha hachurado en la fig. 3 c (3).

Se procederia del mismo modo si el paramento poligonal fuera constituido por mayor número de elementos planos: un paramento curvo puede ser reemplazado por una série de caras planas.

---

(1) Este punto c' puede fijarse mas rápidamente con ausilio de las tablas que damos mas adelante. En efecto, bastará tomar el valor tabular K=0,191551, que corresponde al caso estudiado de $\phi = 35°$ i paramento en talud de ¼, i multiplicar ese valor tabular por el doble de la altura $b\,o'$.

El producto $2 \times 5 \times 0{,}191551 = 1{,}91551$ es el valor de $b\,c'$.

(2) El valor tabular K=0,124859, que corresponde a $\phi = 35°$ i paramento vertical, multiplicado por el doble de la altura $o\,o'$ nos da el valor de la base $o\,q'$ de este triángulo. ($o\,q' = 2 \times 10 \times 0{,}124859 = 2{,}49718$).

(3) En realidad, como lo observa Müller-Breslau, este procedimiento no es rigurosamente exacto, puesto que equivale a admitir la existencia de dos planos de derrumbe. Sin embargo los resultados son suficientemente exactos para las aplicaciones; i seguramente mayores son los errores que se orijinan con las hipótesis de las cuales se parte, como ser la de suponer plana la superficie de fractura, i con los valores, mas o ménos aproximados, que se adopten para ϕ, ϕ', π', etc.

Lo anterior nos da como empujes totales:

Para $B\,C$: $Q_1 = \pi' \times \text{sup. } c'\,o'\,c\,c'' = 1600 \times 5 \dfrac{0{,}48 + 2{,}38}{2} = 11440$ k.

Para $C\,F'$: $Q_2 = \pi' \times \text{sup. } f\,e\,e'\,f' = 1600 \times 4 \dfrac{1{,}58 + 2{,}60}{2} = 13376$ k.

Para $F'\,A$: $Q_3 = \pi' \times \text{sup. } q'\,f\,f'\,q'' = 1600 \times 1 \dfrac{2{,}60 + 2{,}85}{2} = 4360$ k.

b). *Centros de empuje.*—Segun hemos visto (1), para tener los puntos de aplicacion de las fuerzas Q_1, Q_2 i Q_3 bastará determinar los centros de gravedad g_1, g_2 g_3, de los trapecios representativos de dichos empujes, i proyectarlos horizontalmente sobre el muro en e_1, e_2, e_3 i estos puntos serán los centros de empuje.

Para determinar el centro de gravedad g_1 de un trapecio tal como el $c'\,o'\,c\,c''$ las construcciones, como se sabe, son sencillas; puesto que se reducen a unir los puntos medios de sus dos bases (2), a prolongar, enseguida, la base superior en una cantidad $o'\,s$ igual a la base inferior $c'\,c''$, i a prolongar, asimismo, en sentido opuesto, la base inferior en una cantidad $c''\,s'$ igual a la base superior $o'\,c$. La interseccion de la primera recta trazada con $s\,s'$ es el centro de gravedad buscado.

Se ve que si las sobrecargas fueran nulas el trapecio de empuje se trasformaría en un triángulo i el centro de empuje g_1 se encontraria entónces a un tercio de la altura $b\,o'$ a partir de la base. Si se supusiera que solo existiesen las sobrecargas, el trapecio de los empujes se trasformaria en un rectángulo i el centro de empuje se encontraria a media altura.

De la misma manera se determinarian los centros g_2 i g_3. En la figura 3 c, con ese objeto, se ha tomado $e'\,r = f\,f'$ i $f\,r' = e\,e'$, para la determinacion de g_2; i $f'\,l = q'\,q''$ i $q'\,l' = f\,f'$ para la determinacion de g_3.

c). *Direccion de los empujes.*—El empuje de las tierras forma con la normal al paramento del muro el angulo ϕ' de rozamiento de tierras sobre el muro (3). Nosotros hemos adoptado $\phi' = \phi = 35^\circ$ i en estas condiciones se han dibujado (fig. 3) las líneas de accion de los empujes Q_1, Q_2 i Q_3 en su verdadera posicion.

d). *Pesos de los trozos.*—Se tiene:

Para $C\,E$: $P_1 = 2400 \times 5 \dfrac{1.75 + 3}{2} = 28500$ k.

Para $B\,F$: $P_2 = 2400 \times 4 \times 3 = 28800$ k.

Para $F'\,N$: $P_3 = 2400 \times 1 \times 3{,}50 = 8400$ k.

---

(1) V. An. del Inst. de Ings. de Chile, 1902, páj. 64, § 7.

(2) En nuestro caso esta recta es la misma que resulta de unir u con el punto medio i de la base inferior $c'\,c''$.

(3) Anales citados, páj. 55, § 2.

En la fig. 3 se han determinado los centros de gravedad G_1, G_2 i G_3 de los diversos trozos i se han trazado, en seguida, en su verdadera posicion, las líneas de accion de P_1, P_2 i P_3.

d). Curva de los centros de presion (figs. 3 i 3 d).—Encima de la junta $E\,B$ los esfuerzos que actuan son Q_1 i P_1. Podemos reemplazar estas dos fuerzas por su resultante R_1 que pasa por la comun interseccion de Q_1 i P_1 i que en intensidad, direccion i sentido nos es dada por la recta $\alpha\,\beta$ (fig. 3 d). El punto η_1, en que esta resultante total, de todos los esfuerzos que actuan encima de EB, corta a esta junta, es el centro de presion en dicha junta.

Para la junta FF' determinaremos asimismo la resultante de todos los esfuerzos que actuan encima de esa junta. Estos esfuerzos son R_1, Q_2 i P_2. La intensidad, direccion i sentido de la resultante de Q_2 i P_2 quedan determinados por la recta $\beta\,\gamma$; de modo que tendremos en su verdadera posicion la línea de accion r_2 de la resultante de Q_2 i P_2, trazando por la interseccion de ámbas la paralela a $\beta\,\gamma$.

Encima de $F\,F'$ actuan pues las dos fuerzas R_1 i r_2. La resultante de ámbas es $\alpha\,\gamma$ en intensidad, direccion i sentido; i su verdadera posicion es R_2, determinada con ausilio del polígono funicular que se indica en la parte superior de la figura 3 i que corresponde al diagrama polar de la fig. 3 d.

Esta resultante total R_2, de todos los esfuerzos que actuan encima de $F\,F'$, determina el centro de presion η_2 en esta junta.

De la misma manera, si en la fig. 3 reemplazamos a Q_3 i P_3 por su resultante r_3, paralela a $\gamma\,\delta$. tendremos que encima de $A\,N$ actuan las fuerzas R_1, r_2 i r_3 (o R_2 i r_3) cuya resultante total, en intensidad, direccion i sentido, es $\alpha\,\delta$; i cuya verdadera posicion, en la fig. 3, es R_3, trazada paralelamente a $\alpha\,\delta$ por la interseccion de los lados del funicular correspondientes a los radios polares 0 i 3 que corresponden a $\alpha\,\delta$.

La resultante total R_3 nos da el centro de presion η_3 sobre la última junta.

La curva de presiones, que resulta de unir entre sí los centros de presion obtenidos, no ha sido trazada en la fig. 3.

Se sabe que ordinariamente se exije que la curva de los centros de presiones no salga fuera del tercio central.

Son conocidas tambien las condiciones que deben satisfacer las diversas resultantes totales R_1, R_2, R_3 para asegurar la estabilidad por deslizamiento.

En el ejemplo de la fig. 3 se presentan los tres casos de centros de presiones: al interior, fuera i al límite del tercio central.

e). Cálculo de las presiones.—Para la junta $E\,B$ se tiene como valor del esfuerzo normal que actua en esa junta (fig. 3 d):

$$N_1 = \beta\,\beta' = 37{,}25 \text{ t.}$$

El ancho $E\,B$ de la junta es $a_1 = 3$ m. i la distancia $E\,\eta_1$ del centro de presion a la arista mas próxima resulta:

$$u_1 = 1{,}125 \text{ m.}$$

En esta junta el centro de presion queda pues al interior del tercio central. La materia trabaja segun la lei del trapecio i la presiou máxima en la arista E será:

$$R' = 2\left(2 - \frac{3u_1}{a_1}\right)\frac{N_1}{a_1} = 2\left(2 - \frac{3 \times 1{,}125}{3}\right)\frac{37250}{3}$$

Lo que da:

$$R' = 21729 \text{ k. por m}^2. = 2{,}2 \text{ k. por cm}^2.$$

En la junta FF' se tiene:

$$N_2 = \gamma\gamma' = 73{,}75 \text{ t.} \qquad a_2 = FF' = 3 \text{ m.} \qquad u_2 = F\eta_2 = 0{,}80$$

El centro de presion cae, pues, fuera del tercio central.

La materia trabaja en tal caso segun la lei de los dos signos: parte de ella por compresion i parte por estension.

La tasa de trabajo máxima por compresion resulta:

$$R' = 2\left(2 - 3\frac{u_2}{a_2}\right)\frac{N_2}{a_2} = 2\left(2 - 3\frac{0{,}80}{3}\right)\frac{73750}{3} = 59000 \text{ k. m}^2. = 5{,}9 \text{ k. cm}^2.$$

La tasa máxima por estension en la arista F' seria:

$$R = 2\frac{N_2}{a_2}\left(\frac{3u_2}{a_2} - 1\right) = 2\frac{73750}{3}\left(\frac{3 \times 0{,}80}{3} - 1\right)$$

$$R = 9833 \text{ k/m}^2 = 0{,}98 \text{ k/cm}^2.$$

Como se sabe, jeneralmente no se admite que la albañilería trabaje a la estension por baja que sea la tasa de trabajo, suponiéndose que solo trabaja por compresion la zona de ancho $3\,u_2$ a partir de F, i que el resto queda inactivo. En este caso la presion máxima en F seria:

$$R' = 2\frac{N_2}{3\,u_2} = \frac{147500}{2.4} = 61458 \text{ k. por m.}^2 = 6 \text{ k/cm.}^2$$

Por fin, en la junta NA tenemos:

$$N_3 = \delta\delta' = 84{,}75\,t \qquad a_3 = NA = 3{,}50 \text{ m.} \qquad u_3 = N\eta_3 = 1{,}165 \text{ m.}$$

La materia trabaja segun la lei del triángulo, puesto que el centro de presion η_3 cae precisamente en el límite del tercio central. En la arista A las presiones son cero i en la arista N, en donde dichas presiones alcanzan a su máximo, son:

$$p = 2\frac{N_3}{a_3} = \frac{169500}{3{,}5} = 48444 \text{ k/m.}^2 = 4{,}8 \text{ k/cm.}^2$$

TABLAS PARA EL CÁLCULO DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS EN TERRAPLENES LIMITADOS SUPERIORMENTE POR UN PLANO HORIZONTAL

Adoptando la teoría de Poncelet, hemos visto que la espresion analítica del empuje máximo de las tierras es:

$$Q = \frac{\pi'}{2}\,y.\,z.$$

O sea (fig. 4):

$$Q = \frac{\pi'}{2} . A Z \times A Z' . \text{sen} (T A L.) \qquad (1)$$

Pero, haciendo $\phi = \phi'$:

$$\text{sen} (T A L) = \text{sen} (90^\circ - \phi + \theta + 2 \phi) = \cos (\phi + \theta)$$

Ademas: se tiene:

$$A Z = L A - L Z$$

I hemos visto que para el empuje máximo se verifica:

$$L Z = \sqrt{L A \times L F}$$

De la misma manera, tenemos:

$$A Z' = L' A - L' Z' \text{ i } L' Z' = \sqrt{L' A \times L' F'}$$

Luego:

$$A Z = L A - \sqrt{L A \times L F}$$

Por otra parte:

$$L A = \frac{h}{\cos (2 \phi + \theta)}$$

$$L F = L B \frac{\text{sen } \phi}{\cos (\phi + \theta)} = A B \frac{\text{sen } 2 \phi}{\cos (2 \phi + \theta)} \frac{\text{sen } \phi}{\cos (\phi + \theta)}$$

$$L F = \frac{h}{\cos \theta} \frac{\text{sen } \phi . \text{sen } 2 \phi}{\cos (\phi + \theta) \cos (2 \phi + \theta)}$$

En consecuencia:

$$A Z = \frac{h}{\cos (2 \phi + \theta)} - \sqrt{\frac{h^2 \text{ sen } \phi . \text{sen } 2 \phi}{\cos^2 (2 \phi + \theta) \cos \theta \cos (\phi + \theta)}}$$

O sea:

$$A Z = \frac{h}{\cos (2 \phi + \theta)} \left[1 - \sqrt{\frac{\text{sen } \phi . \text{sen } 2 \phi}{\cos \theta . \cos (\phi + \theta)}} \right]$$

De la misma manera, haciendo $A N' = N$, tendríamos:

$$A Z' = \frac{N}{\cos (2 \phi + \theta)} \left[1 - \sqrt{\frac{\text{sen } \phi . \text{sen } 2 \phi}{\cos \theta \cos (\phi + \theta)}} \right]$$

Luego, sustituyendo los valores de $A Z$, $A Z'$ i sen $(T A L)$ en la espresion (1), tenemos:

$$Q = \frac{\pi' . h . N}{2} \frac{\cos (\phi + \theta)}{\cos^2 (2 \phi + \theta)} \left[1 - \sqrt{\frac{\text{sen } \phi . \text{sen } 2 \phi}{\cos \theta \cos (\phi + \theta)}} \right]^2$$

I haciendo:

$$\frac{\cos (\phi + \theta)}{2 . \cos^2 (2 \phi + \theta)} \left[1 - \sqrt{\frac{\text{sen } \phi . \text{sen } 2 \phi}{\cos \theta \cos (\phi + \theta)}} \right]^2 = K \qquad (2)$$

se tendria, cuando existen sobrecargas:

$$Q = K . \pi' . h . N \qquad (A)$$

Cuando no hai sobrecargas, se tiene $N = h$, lo que da:

$$Q = K . \pi' . h^2 \qquad (B)$$

Es fácil ver que todas las espresiones que acabamos de deducir son jenerales; solo que cuando la pared $A\ B$ se inclina hácia el lado de las tierras (paramento en desplome) el ángulo θ es negativo. Cuando $\theta = O$ (paramento vertical) la espresion (2) se simplifica convirtiéndose en:

$$K = \frac{\cos \phi}{2\,(1 + \sqrt{2}\ \text{sen}\ \phi)^2} \qquad (3)$$

Valiéndonos pues de las espresiones (2) i (3), hemos calculado los valores de K para erraplen limitado superiormente por un plano horizontal i para distintos valores de ϕ i, θ. Este último ángulo figura en la tabla por su tanjente.

Cálculos análogos nos darian el valor de K para el caso de terraplen limitado superiormente por un plano inclinado, valores que por ahora no figuran en la tabla que publicamos a continuacion.

Como hemos dicho ántes, multiplicando por $2\,h$ el valor de K dado por la tabla, tendremos la base del triángulo de los empujes que corresponde a dicho valor de h i al caso considerado.

Aplicaciones. 1).—¿Cuál es el empuje producido por un terraplen limitado superiormente por un plano horizontal, si el ángulo del talud natural de las tierras es $\phi = 35°$ el peso de las tierras en $\pi' = 1600$ k. por m³., la altura del terraplen es $h = 5$ m. i el paramento interior del muro es en talud de $\frac{1}{4}$?

La tabla da para este caso:

$$K = 0{,}191551$$

I sustituyendo en la fórmula (B):

$$Q = 0{,}191551 \times 1600 \times 25 = 7662 \text{ kgs.}$$

2).—Supongamos que se trata de determinar el empuje sobre un muro de paramento interior vertical manteniendo los demas datos iguales al caso anterior.

Entónces resulta:

$$K = 0{,}124859$$

$$Q = 0{,}124859 \times 1600 \times 25 = 4994 \text{ kgs.}$$

3).—Supongamos ahora un muro de paramento interior en *desplome* de $\frac{1}{5}$; el terraplen de 7 m. de altura, con una sobrecarga de $\pi'' = 1950$ kgs. por m².; el talud natural de las tierras $\phi = 40°$ i $\pi' = 1300$ kgs. por m³. como peso de las tierras.

La tabla da:

$$K = 0{,}067089$$

El espesor de tierras equivalente a la sobrecarga es:

$$e = \frac{1950}{1300} = 1{,}50 \text{ m.}$$

Luego:

$$N = h + 2\ e = 7 + 3 = 10 \text{ m.}$$

Introduciendo estos valores en la fórmula (A):

$$Q = 0{,}067089 \times 1300 \times 7 \times 10 = 6105 \text{ kgs.}$$

VALORES DEL COEFICIENTE K QUE FIGURA EN LAS FÓRMULAS (A) I (B)

	TANJ. θ	$\phi=25°$	$\phi=30°$	$\phi=35°$	$\phi=40°$	$\phi=45°$	$\phi=50°$	$\phi=55°$
PARAMENTO INTERIOR EN TALUD	1/4	0,240521	0,213661	0,191551	0,173289	0,158250	0,146064	0,136627
	1/5	0.226495	0,199046	0,176378	0,157506	0,141732	0,128568	0,117742
	1/6	0,217605	0,189818	0,166852	0,147674	0,131538	0,117920	0,106436
	1/8	0,206815	0,178655	0,155387	0,135923	0,119465	0,105426	0,093381
	1/10	0,200610	0.172255	0,148845	0,129257	0,112669	0,098468	0,086198
	1/15	0,192610	0,164026	0,140466	0,120769	0,104072	0,089740	0,077286
	1/20	0,188739	0,160053	0,136436	0,116703	0,099979	0,085615	0,073114
Vertical	O	0,177529	0,148586	0,124859	0,105098	0,088388	0,074048	0,061556
PARAMENTO INTERIOR EN DESPLOME	− 1/20	0,166955	0,137823	0,114073	0,094391	0,077823	0,063662	0,051377
	− 1/15	0,163575	0,134395	0,110656	0,091022	0,074526	0,060455	0,048275
	− 1/10	0,156985	0,127729	0.104037	0,084528	0,068212	0,054362	0,042443
	− 1/8	0,152206	0,123190	0,099277	0,079888	0,063735	0,050084	0,038399
	− 1/6	0,144507	0,115182	0,091683	0,072540	0,056710	0,043450	0,032219
	− 1/5	0,138679	0,109358	0,086002	0,067089	0,051555	0,038646	0,027828
	− 1/4	0,130291	0,101026	0,077936	0,059429	0,044403	0,032090	0,021966

Los valores de θ con que se ha calculado el cuadro anterior son:

TANJ. $\theta=$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$
$\theta=$	14° 2′	11° 19′	9° 29′	7° 8′	5° 43′	3° 49′	2° 52′

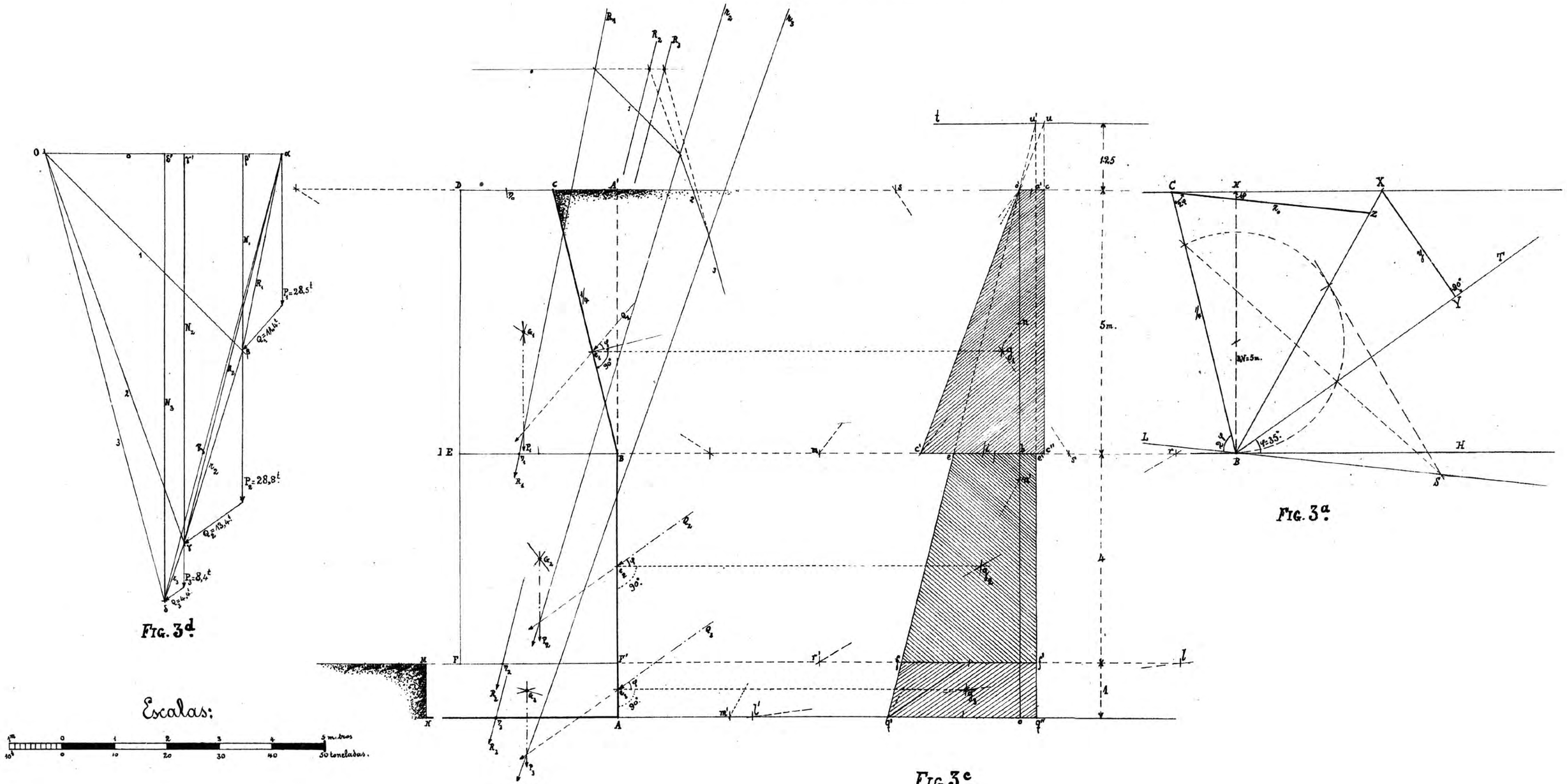


FIG. 3d.

FIG. 3.

FIG. 3c.

FIG. 3a.

Fig. 1.

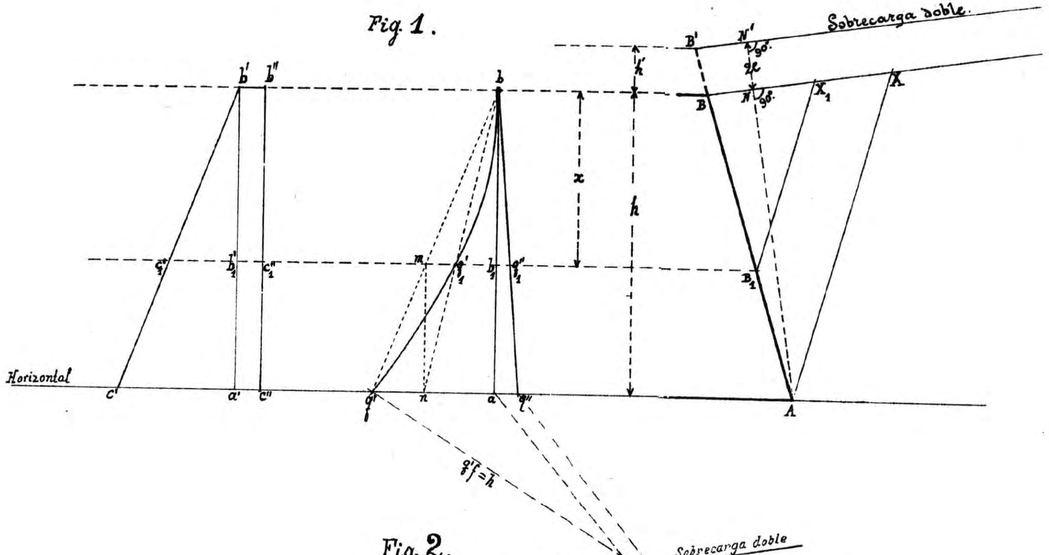
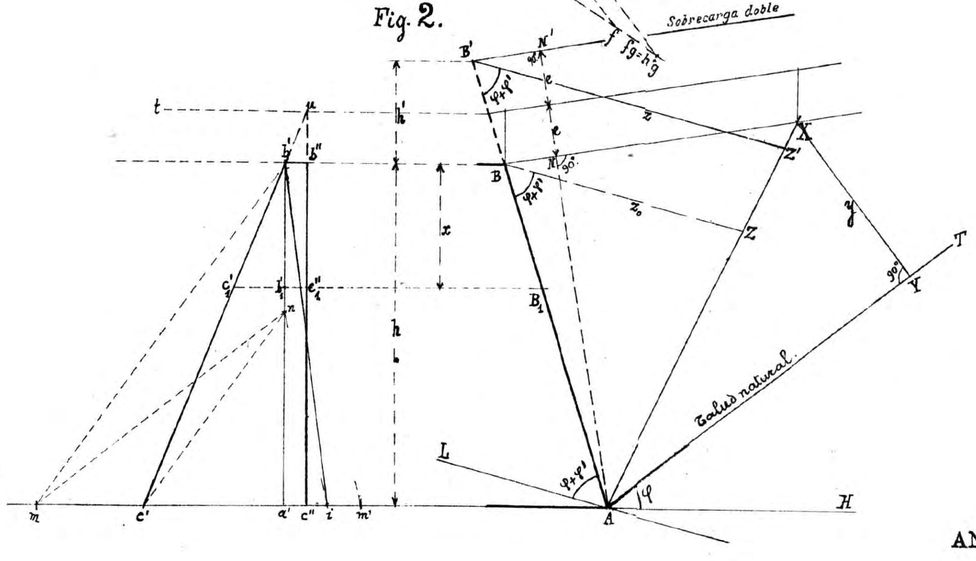


Fig. 2.



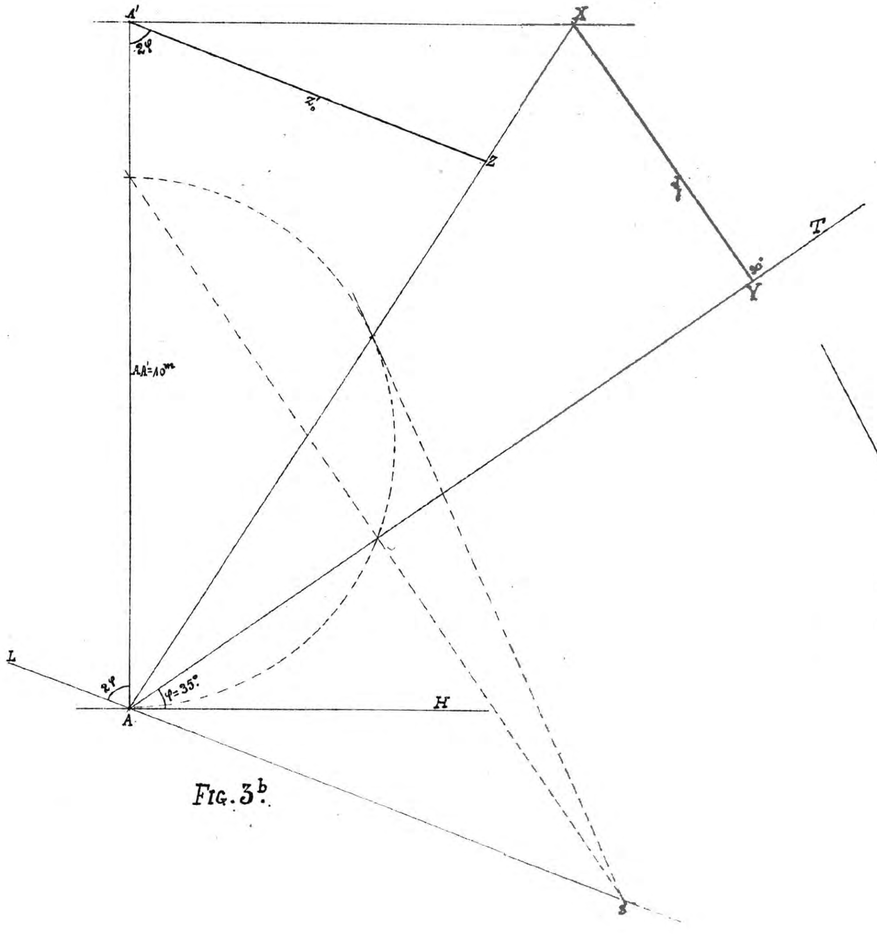
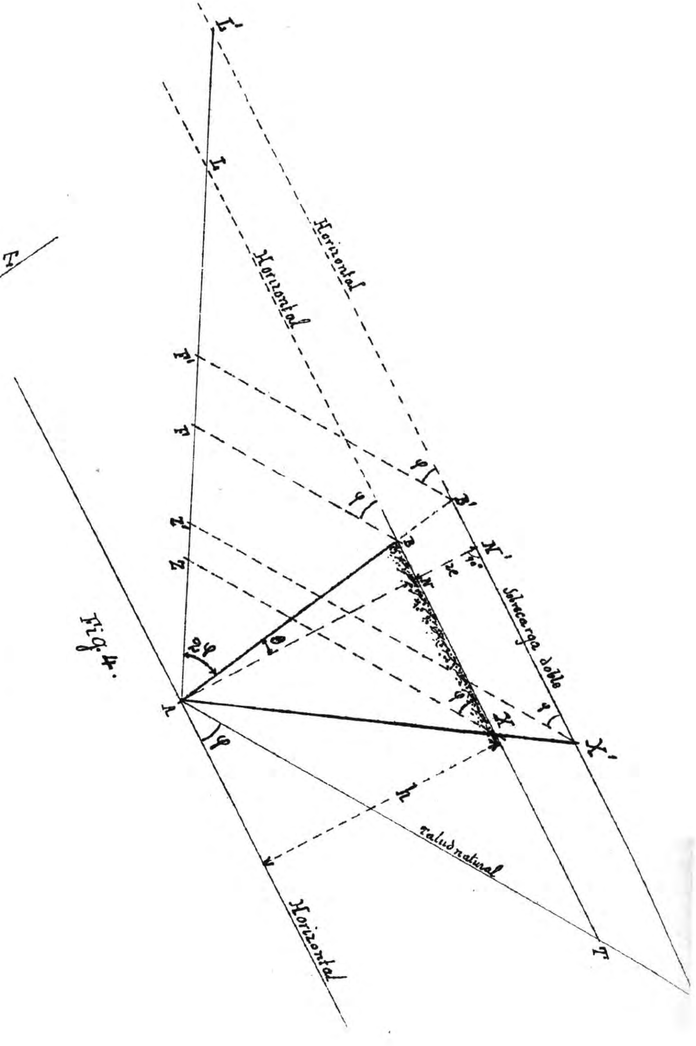


Fig. 3b.

Fig. 4.



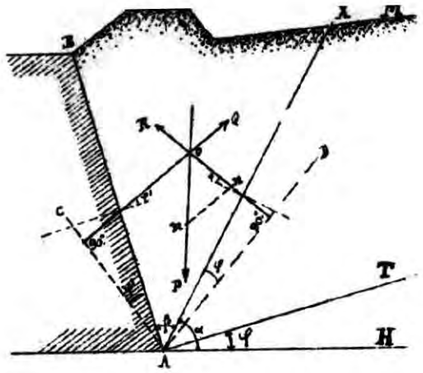


Fig. 1.

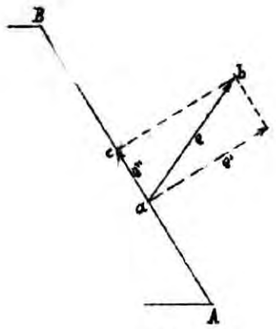


Fig. 2.

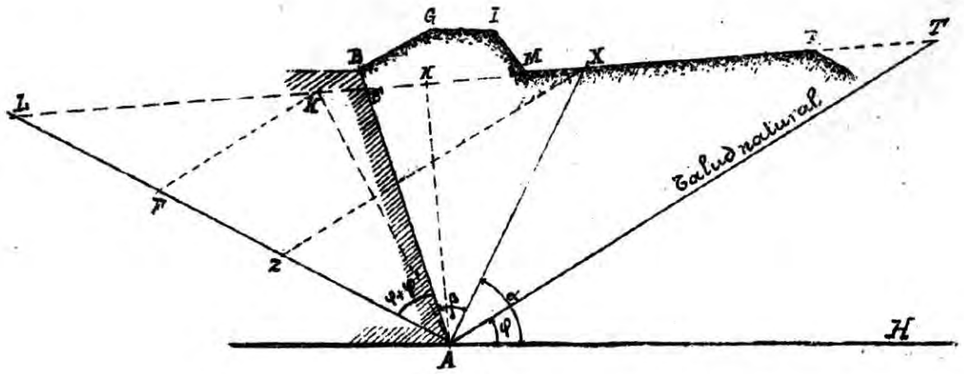


Fig. 3.

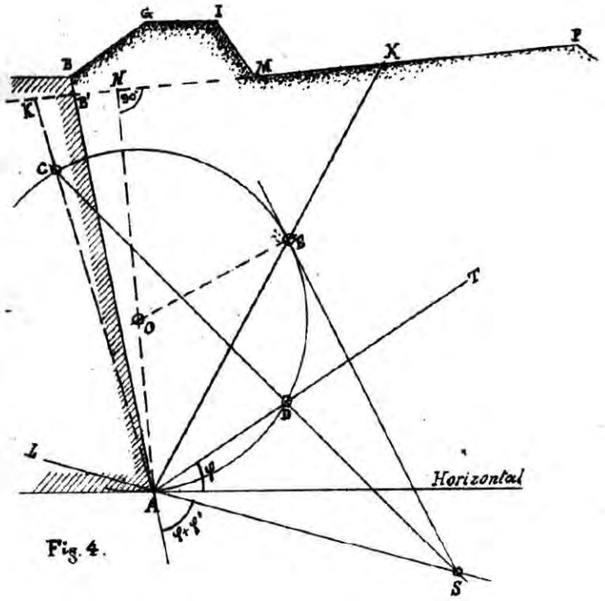


Fig. 4.

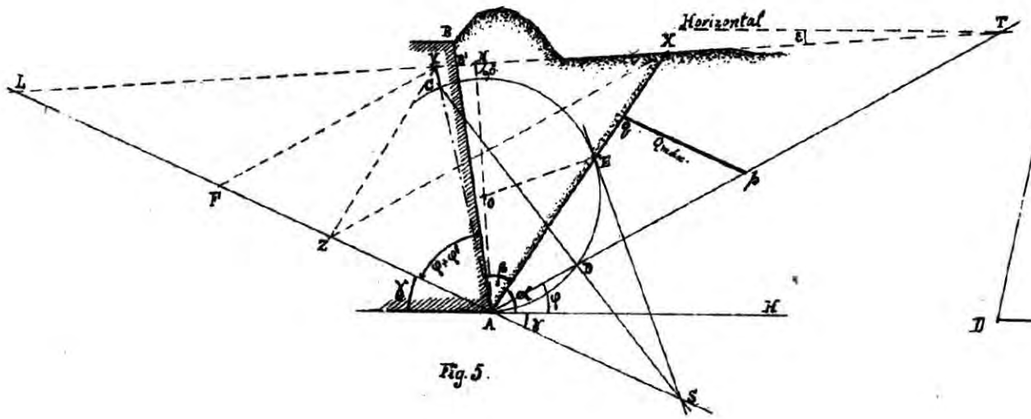


Fig. 5.

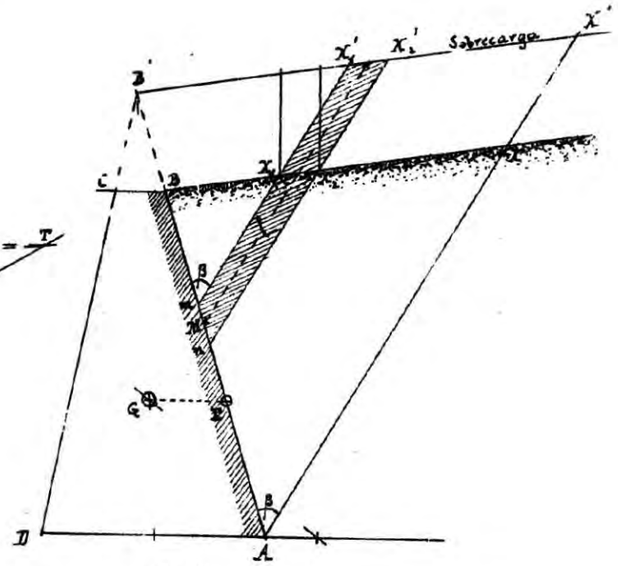
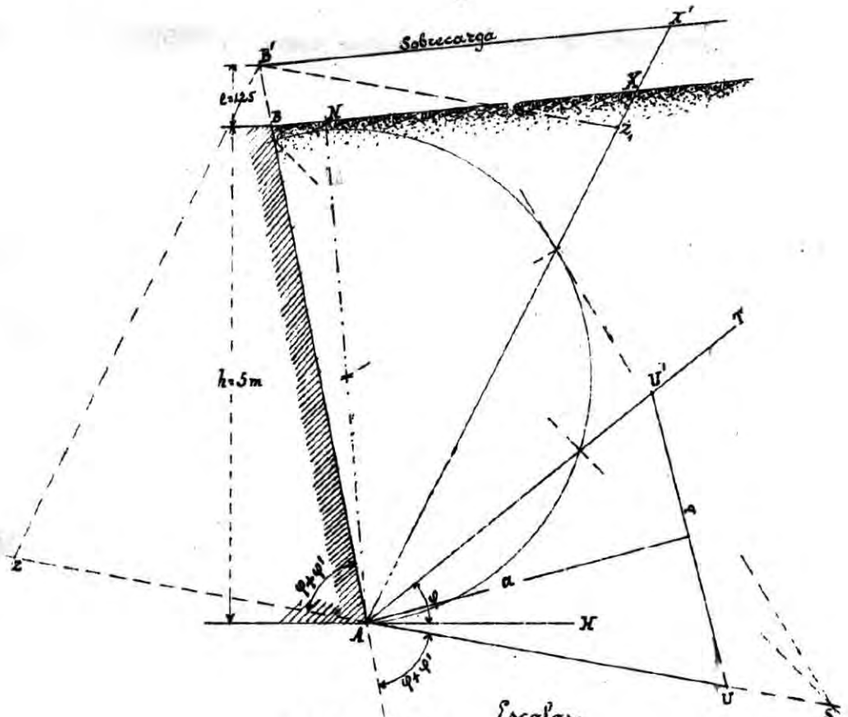


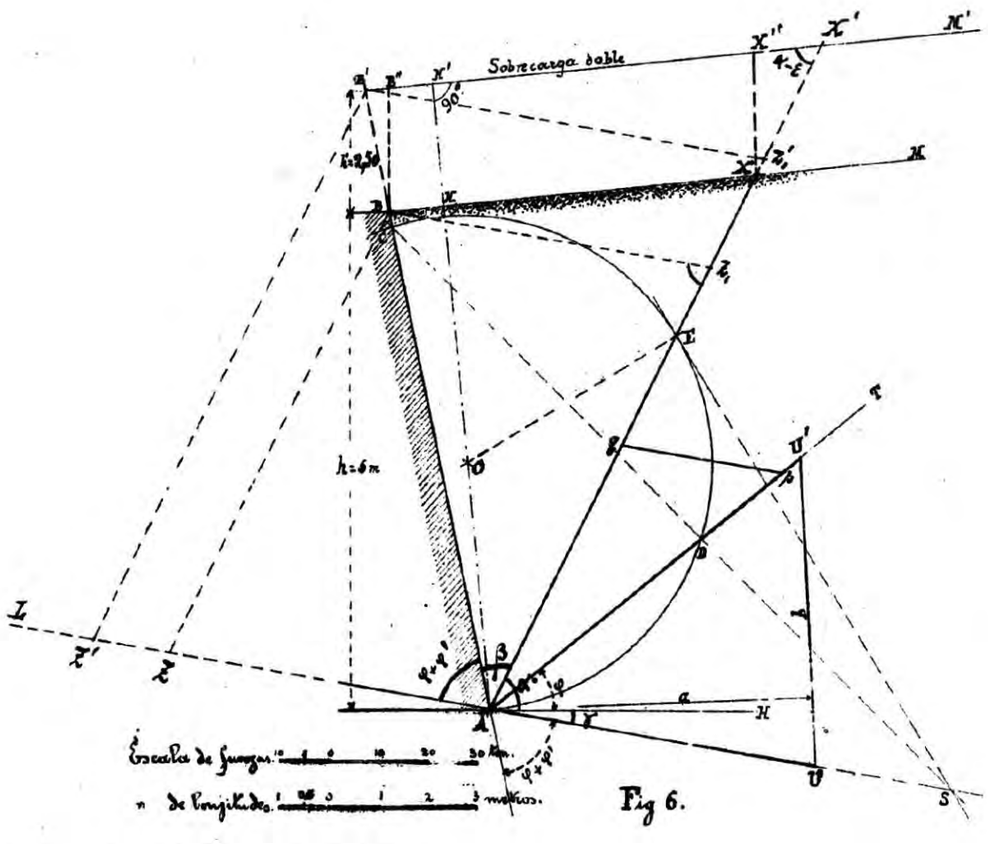
Fig. 8.



Escalas:

Fig. 7. De longitudes 1 0 1 2 3 4 metros

De fuerzas 10 5 0 10 20 30 40 toneladas



Escalas de fuerzas 10 5 0 10 20 30 tons.

" de longitudes 1 0.5 0 1 2 3 metros.

Fig 6.