Ing. Julio Tapia Cabezas

Refuerzos de puentes metálicos en los Ferrocarriles del Estado

(Continuación)

REFUERZO DEL PUENTE QUINO

El puente Quino es un viaducto situado en el kilómetro 634.000 de la línea central, entre Victoria y Temuco. Se compone de cuatro tramos continuos de 50 metros de luz cada uno, apoyados sobre dos estribos de albañilería de piedra y tres pilas metálicas. En la lámina 31 se ve un esquema del puente con su refuerzo y detalles de sus principales ensambles. A continuación, damos el cálculo analítico de las líneas de influencia para los apoyos.

Línea de influencia de los momentos en las pilas.

La ecuación general de los tres momentos o de Clapeyron es la siguiente:

$$l_2\left[M_0\int_0^{l_1}\frac{x\,d\,x}{I}+\frac{M_1-M_0}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{x^2\,d\,x}{I}\right]+l_1\left[M_1\int_0^{l_2}\frac{(l_2-x)\,d\,x}{I}+\right.$$

$$\left.+\frac{M_2-M_1}{l_2}\int_0^{l_2}\frac{(l_2-x)\,x\,d\,x}{I}\right]=-l_2\int_0^{l_1}\frac{M\,x\,d\,x}{I}-l_1\int_0^{l_2}\frac{M\,(l_2-x)\,d\,x}{I}+$$

$$+E\left[l_2\,(y_0-y_1)+l_1\,(y_2-y_1)\right]$$ Ver lámina 32.

Para el puente Quino tenemos las siguientes condiciones:

1) Luces iguales, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.
2) Apoyos al mismo nivel, $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$.
3) Momentos de las pilas nulos en 0 y 4, $M_0 = M_4 = 0$.

Con estas condiciones aplicamos la ecuación de los tres momentos para l_1 y l_2 — l_2 y l_3 y l_4 y tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas, los momentos en las pilas, M_1, M_2 y M_3.

$$1)\quad \frac{M_1}{l}\int_0^{l_1}\frac{x^2\,dx}{I} + M_1\int_0^{l_2}\frac{(l^2 - x)\,dx}{I} + \frac{M_2 - M_1}{l}\int_0^{l_2}\frac{x\,(l_2 - x)\,dx}{I} =$$

$$= \int_0^{l_1}\frac{M\,x\,dx}{I} - \int_0^{l_2}\frac{M\,(l_2 - x)\,dx}{I}$$

$$2)\quad M_1\int_0^{l_2}\frac{x\,dx}{I} + \frac{M_2 - M_1}{l}\int_0^{l_2}\frac{x^2\,dx}{I} + M_2\int_0^{l_3}\frac{(l_3 - x)\,dx}{I} + \frac{M_3 - M_2}{l}$$

$$\int_0^{l_3}\frac{x\,(l_3 - x)\,dx}{I} = \int_0^{l_2}\frac{M\,x\,dx}{I} - \int_0^{l_3}\frac{M\,(l_3 - x)\,dx}{I}$$

$$3)\quad M_2\int_0^{l_3}\frac{x\,dx}{I} + \frac{M_3 - M_2}{l}\int_0^{l_3}\frac{x^2\,dx}{I} + M_3\int_0^{l_4}\frac{(l_4 - x)\,dx}{I} - \frac{M_3}{l}$$

$$\int_0^{l_4}\frac{x\,(l_4 - x)\,dx}{I} = \int_0^{l_3}\frac{M\,x\,dx}{I} - \int_0^{l_4}\frac{M\,(l_4 - x)\,dx}{I}$$

Como las luces son iguales y los momentos de inercia también lo son en los tramos 2 y 3 e iguales, pero no simétricos respecto del origen de la abscisa x en los tramos 1 y 4 tendremos que muchos de los valores de los integrales son iguales. Para simplificar tendremos:

$$\int_0^{l_1}\frac{x\,dx}{I} = \int_0^{l_4}\frac{(l_4 - x)\,dx}{I} = A_1$$

$$\int_0^{l_2}\frac{x\,dx}{I} = \int_0^{l_3}\frac{x\,dx}{I} = \int_0^{l_2}\frac{(l_2 - x)}{I}\,dx = \int_0^{l_3}\frac{l_3 - x}{dx} = A_2$$

$$\int_0^{l_1}\frac{x^2\,dx}{I} = B_1$$

$$\int_0^{l_2}\frac{x^2\,dx}{I} = \int_0^{l_3}\frac{x^2\,dx}{I} = B_2$$

$$\int_0^{l_4}\frac{x\,(l_4 - x)}{I}\,dx = D_1$$

$$\int_0^{l_2}\frac{x\,(l_2 - x)\,dx}{I} = \int_0^{l_3}\frac{x\,(l_3 - x)\,dx}{I} = D_2$$

Estos valores en que hay una sola variable x, los llamaremos valores fijos, porque son constantes para cualquiera sección de un mismo tramo.

Llamaremos variables los valores en que aparece, además de la variable x el momento simple M, éstas tienen tantos valores como puntos de la línea de influencia quieramos tener; son:

$$\int_0^{l_1} \frac{M\ x\ d\ x}{I} = E_1$$

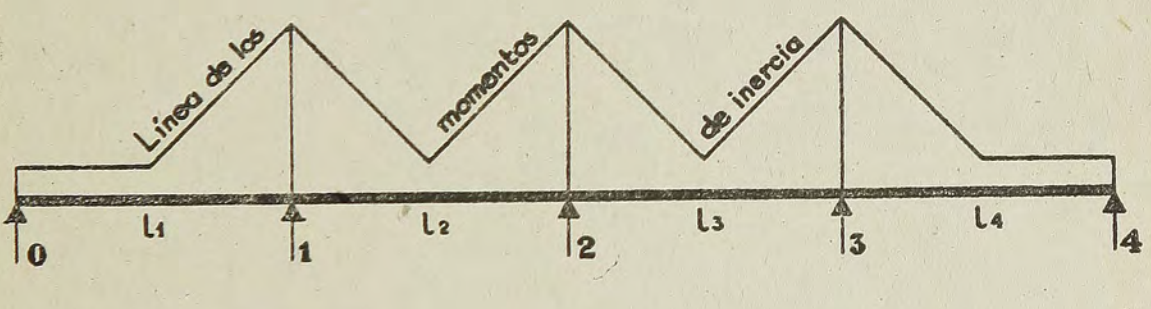
$$\int_0^{l_2} \frac{M\ x\ d\ x}{I} = \int_0^{l_3} \frac{M\ x\ d\ x}{I} = E_2 = E_3$$

$$\int_0^{l_2} \frac{M\ (l_2 - x)}{I}\ d\ x = \int_0^{l_3} \frac{M\ (l_3 - x)\ d\ x}{I} = F_2 = F_3$$

$$\int_0^{l_4} \frac{M\ (l_4 - x)\ d\ x}{I} = F_4$$

Lámina 32

Puente Quino



Como el incremento dx es constante e igual para todos los tramos, podemos simplificar por él

(ampl. por l)

1) $B_1M_1 + A_2\,l\,M_1 + D_2M_2 - D_2M_1 = -(E_1 + F_2)\,l$

2) $A_2\,l\,M_1 + B_2M_2 - B_2M_1 + A_2\,l\,M_2 + D_2M_3 - D_2M_2 = -(E_2 + F_3)\,l$

3) $A_2\,l\,M_2 + B_2M_3 - B_2M_2 + A_1\,l\,M_3 - D_1M_3 = -(E_3 + F_4)\,l$

I) $(B_1 + A_2\,l - D_2)\,M_1 + D_2M_2 = -(E_1 + F_2)\,l$

II) $(A_2\,l - B_2)\,M_1 + (A_2\,l + B_2 - D_2)\,M_2 + D_2M_3 = -(E_2 + F_3)\,l$

III) $(A_2\,l - B_2)\,M_2 + (A_1\,l + B_2 - D_1)\,M_3 = (E_3 + F_4)\,l$

Para simplificar más pondremos:

$$B_1 + A_2\, l - D_2 = a$$
$$A_2\, l - B_2 = b$$
$$A_2\, l + B_2 - D_2 = c$$
$$A_1\, l + B_2 - D_1 = d$$

y las variables

$$-(E_1 + F_2)\, l = e$$
$$-(E_2 + F_3)\, l = f$$
$$-(E_3 + F_4)\, l = g$$

$$\text{I)}\quad aM_1 + D_2M_2 = e$$
$$\text{II)}\quad bM_1 + cM_2 + D_2M_3 = f$$
$$\text{III)}\quad bM_2 + dM_3 = g$$

$$M_1 = \frac{e - D_2M_2}{a} \qquad M_3 = \frac{g - bM_2}{d}$$

$$b\,\frac{e - D_2M_2}{a} + cM_2 + D_2\,\frac{g - bM_2}{d} = f$$

$$ebd - bdD_2M_2 + acdM_2 + agD_2 - abD_2\,M_2 = a\,d\,f$$
$$(acd - bdD_2 - abD_2)\,M_2 = adf - ebd - agD_2$$
$$acd - bdD_2 - abD_2 = acd - (d + a)\,bD_2 = K$$

$$M_2 = \frac{adf - ebd - agD_2}{K}$$

K es un valor fijo.

Los valores de M_1 y M_3 los tenemos ya expresados en función de M_2.

Líneas de influencia de M_2

1) Primero calculamos los valores fijos

$$A_1 = \sum_0^{l_1} \frac{x}{I} \qquad B_1 = \sum_0^{l_1} \frac{x^2}{I}$$

$$A_2 = \sum_0^{l_2} \frac{x}{I} \qquad B_2 = \sum_0^{l_2} \frac{x^2}{I}$$

$$D_1 = \sum_0^{l_4} \frac{x\,(l_4 - x)}{I}$$

$$D_2 = \sum_0^{l_2} \frac{x\,(l_2 - x)}{I}$$

Con éstas, determinamos los valores a — b — c y d y después K.

2) Se determinan los valores variables

$$E_1 = \sum_0^{l_1} \frac{M\,x}{I} \qquad F_2 = \sum_0^{l_2} \frac{M\,(l_2 - x)}{I}$$

$$E_2 = \sum_0^{l_2} \frac{M\,x}{I} \qquad F_4 = \sum_0^{l_4} \frac{M\,(l_4 - x)}{I}$$

3) *Valores de M_2*

Carga en el primer tramo

$$E_2 = E_3 = F_2 = F_4 = 0$$

$$e = - E_1\,l$$

$$f = g = 0$$

$$M_2 = \frac{b\,d\,l\,E_1}{K}$$

Carga en el segundo tramo

$$E_1 = E_3 = F_3 = F_4 = 0 \qquad e = - F_2\,l \qquad f = - E_2\,l \qquad g = 0$$

$$M_2 = - \frac{a\,d\,l\,E_2 + b\,d\,l\,F_2}{K} = \frac{d\,l}{K}\,(a\,E_2 - b\,F_2)$$

En los tramos 3 y 4 la línea es simétrica respecto de 1 y 2.

Valores de M_1

Carga en el primer tramo

El valor variable además de M_2 es e.

$$e = - E_1\,l$$

$$M_1 = \frac{- E_1\,l - D_2\,M_2}{a}$$

Carga en el segundo tramo

$$e = - F_2\,l$$

$$M_1 = \frac{- F_2\,l - D_2\,M_2}{a}$$

Carga en el tercer y cuarto tramos

$$e = 0 \qquad M_1 = \frac{D_2\,M_2}{a}$$

La línea de influencia de M_3 es simétrica de la M_1.

Cálculo numérico

Cálculo de los valores fijos

PRIMER TRAMO.

SECCIÓN	x m	I m^4	$\frac{x}{I}$ m^{-3}	$\frac{x^2}{I}$ m^{-2}	$l_1 - x$ m	$\frac{x\,(l-x)}{I}$ m^{-2}
1.....	5	0,114	43,860	219,300	45	1.973,700
2.....	10	0,114	87,720	877,200	40	3.508,800
3.....	15	0,155	96,774	1.451,610	35	3.387,090
4.....	20	0,155	129,032	2.580,640	30	3.870,960
5.....	25	0,155	161,290	4.032,250	25	4.032,250
6.....	30	0,216	138,889	4.166,670	20	2.777,780
7.....	35	0,266	131,579	4.605,265	15	1.973,685
8.....	40	0,372	107,527	4.301,080	10	1.075,270
9.....	45	0,636	70,755	3.183,975	5	353,775
10.....	50	1,368	36,550	1.827,500	0	0
			1.003,976	27.245,490		22.953,310

$$A_1 = \sum_0^{l_1} \frac{x}{I} = 1004 \text{ m}^{-3}$$

$$B_1 = \sum_0^{l_1} \frac{x^2}{I} = 27.246 \text{ m}^{-2}$$

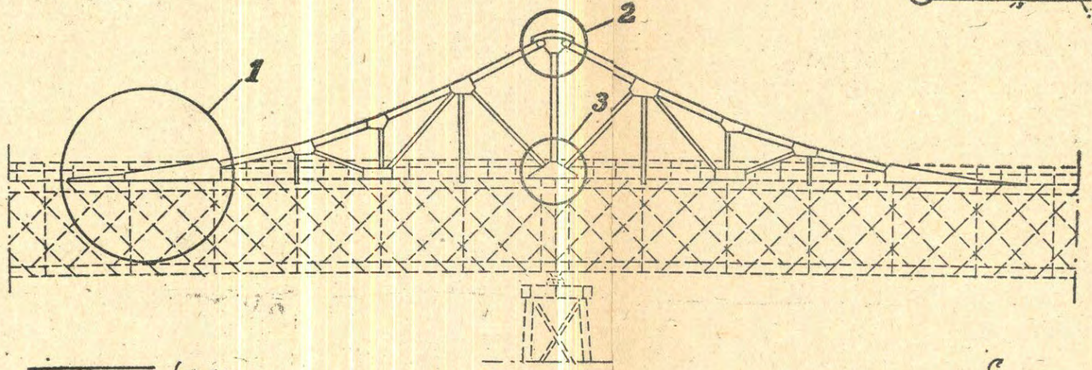
$$D_1 = \sum_0^{l_1} \frac{x\,(l_1 - x)}{I} = 22.953 \text{ m}^{-2}$$

SEGUNDO TRAMO.

SECCIÓN	x m	I m^4	$\frac{x}{I}$ m^{-3}	$\frac{x^2}{I}$ m^{-2}	$l_2 - x$ m	$\frac{x\,(l_2-x)}{I}$ m^{-2}
1.....	5	0,636	7,862	39,310	45	353,790
2.....	10	0,372	26,882	268,820	40	1.075,280
3.....	15	0,266	56,391	845,865	35	1.973,685
4.....	20	0,216	92,593	1.851,860	30	2.777,790
5.....	25	0,155	161,290	4.032,250	25	4.032,250
6.....	30	0,216	138,889	4.166,670	20	2.777,780
7.....	35	0,266	131,579	4.605,265	15	1.973,685
8.....	40	0,372	107,527	4.301,080	10	1.075,270
9.....	45	0,636	70,755	3.183,975	5	353,775
10.....	50	1,368	36,550	1.827,500	0	0
			830,318	25.122,595		16.393,305

Refuerzo tipo 'F'

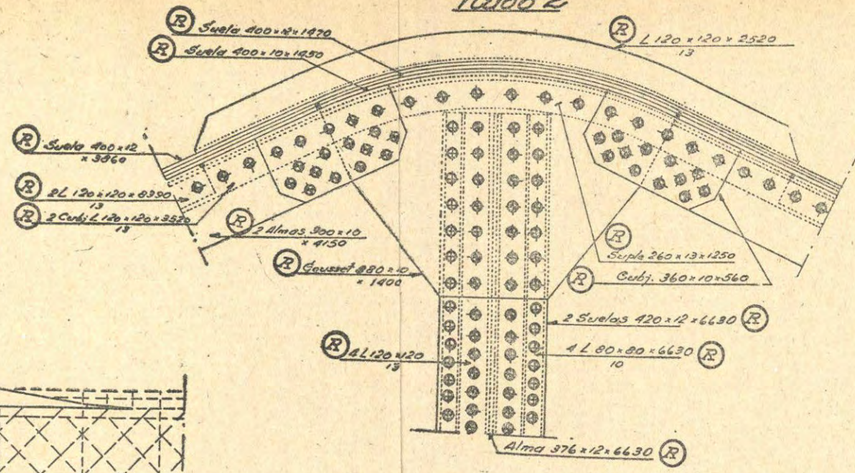
Puente Quino



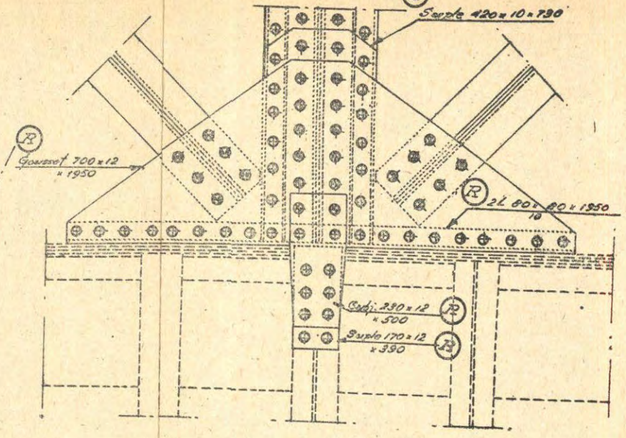
Refuerzo

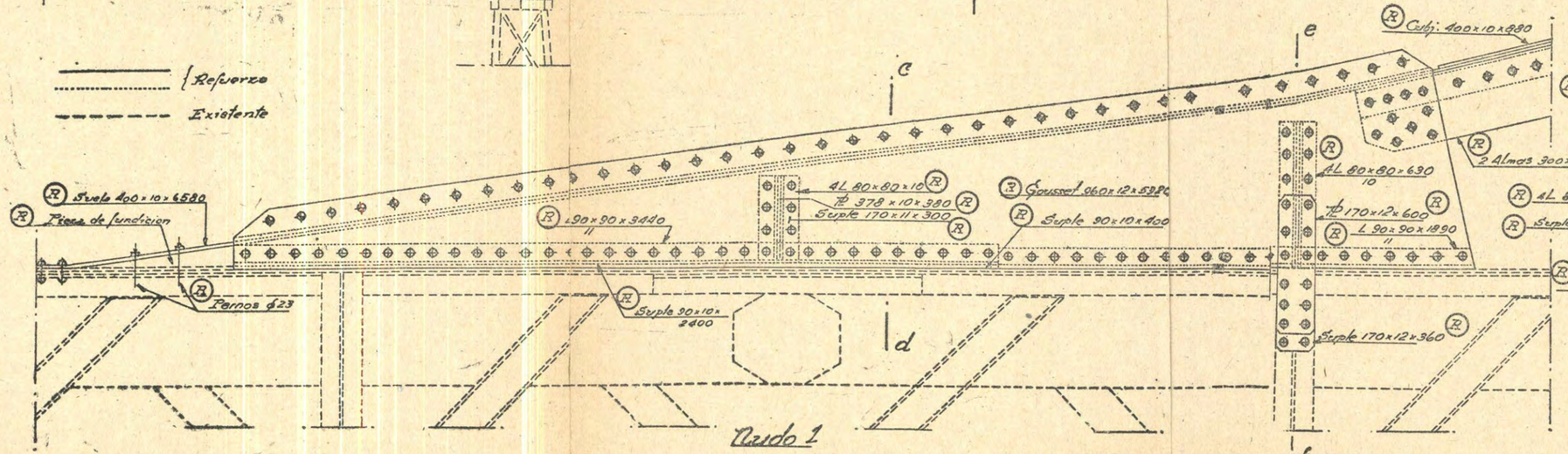
Existente

Nudo 2

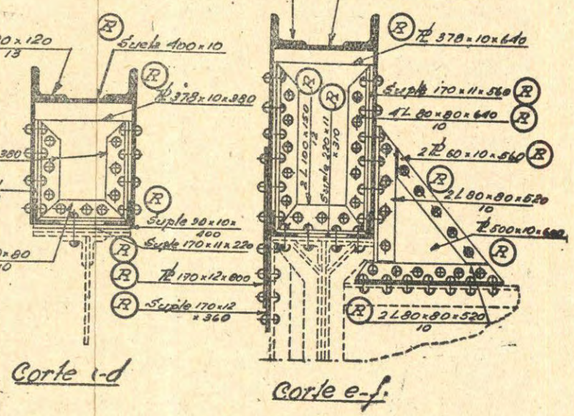


Nudo 3





Nudo 1



Corte c-d

Corte e-f

$$A_2 = \sum_0^{l_2} \frac{x}{I} = 830$$

$$B_2 = \sum_0^{l_2} \frac{x^2}{I} = 25122{,}595$$

$$D_2 = \sum_0^{l_2} \frac{x\,(l_2 - x)}{I} = 16{,}393$$

$A_1 = 1004\ m^{-3}$
$A_2 = 830\ »$
$B_1 = 27246\ m^{-2}$
$B_2 = 25123\ »$
$D_1 = 22953\ »$
$D_2 = 16393\ »$

$l = 50$ m.

$a = 27246 + 830 \cdot 50 - 16.393 = 52353\ m^{-2}$
$b = 41500 - 25123 = 16377\ »$
$c = 41500 + 25123 - 16393 = 50230\ »$
$d = 50200 + 25123 - 22953 = 52370\ »$
$K = 52353 \cdot 50230 \cdot 52370 - (52370 + 52353) \cdot 16377 \cdot 16393 = 109602 \cdot 10^9 =$

Valores variables

PRIMER TRAMO

MOMENTOS M

Sección	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
1.....	4,5	4	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5
2.....	4,0	8	7,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0
3.....	3,5	7	10,5	9,0	7,5	6,0	4,5	3,0	1,5
4.....	3,0	6	9,0	12,0	10,0	8,0	6,0	4,0	2,0
5.....	2,5	5	7,5	10,0	12,5	10,0	7,5	5,0	2,5
6.....	2,0	4	6,0	8,0	10,0	12,0	9,0	6,0	3,0
7.....	1,5	3	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	7,0	3,5
8.....	1,0	2	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	4,0
9.....	0,5	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
10.....	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

$$E_1 = \sum_0^{l_1} \frac{M\,x}{I}$$

Sección	x	$\frac{x}{I}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.....	5	43,860	197	175	154	132	110	88	66	44	22
2.....	10	87,720	351	702	614	526	439	351	263	175	88
3.....	15	96,774	339	677	1016	871	726	581	435	290	145
4.....	20	129,032	387	774	1161	1548	1290	1032	774	516	258
5.....	25	161,290	403	806	1210	1613	2016	1613	1210	806	403
6.....	30	138,889	278	556	833	1111	1389	1667	1250	833	417
7.....	35	131,579	197	395	592	789	987	1184	1382	921	460
8.....	40	107,527	107	215	323	430	538	645	753	860	430
9.....	45	70,755	35	71	106	142	177	213	248	284	319
			2294	4371	6009	7162	7672	7374	6381	4729	2542

$$E_2 = \sum_0^{l_2} \frac{M\,x}{I} = F$$

Sección	$\frac{x}{I}$ m^{-3}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.....	7,862	35	31	27	24	20	16	12	8	4
2.....	26,882	107	215	188	161	134	107	81	54	27
3.....	56,391	197	395	592	507	423	338	254	169	85
4.....	92,593	278	556	833	1111	926	741	556	370	185
5.....	161,290	403	806	1210	1612	2016	1612	1210	806	403
6.....	138,889	278	556	833	1111	1389	1667	1250	833	417
7.....	131,579	197	395	592	789	987	1184	1382	921	461
8.....	107,527	107	215	323	430	538	645	753	860	430
9.....	70,755	35	71	106	142	177	212	248	283	318
		1637	3240	4704	5887	6610	6522	5746	4304	2330

$$F_4 = \sum_0^{l_4} \frac{M\ (l_4 - x)}{I}$$

Sección	$l_4 - x$	I	$\frac{l_4 - x}{I}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.....	45	0,636	71	319	284	248	213	177	142	106	71	35
2.....	40	0,372	107	428	856	749	642	535	428	321	214	107
3.....	35	0,266	132	462	924	1386	1188	990	792	594	396	198
4.....	30	0,216	139	417	834	1251	1668	1390	1112	834	556	278
5.....	25	0,155	161	402	805	1207	1610	2012	1610	1207	805	402
6.....	20	0,155	129	258	516	774	1032	1290	1548	1161	774	387
7.....	15	0,155	97	145	291	436	582	727	873	1018	679	339
8.....	10	0,114	88	88	176	264	352	440	528	616	704	352
9.....	5	0,114	44	22	44	66	88	110	132	154	176	198
				2541	4730	6381	7375	7671	7165	6011	4375	2296

SECCION	E_1	E_2	F_2	F_3	F_4
1.....	2294	1637	2330	2330	2541
2.....	4371	3240	4304	4304	4730
3.....	4009	4704	5746	5746	6381
4.....	7161	5887	6522	6522	7375
5.....	7672	6610	6610	6610	7671
6.....	7347	6522	5887	5887	7165
7.....	6381	5746	4704	4704	6011
8.....	4729	4304	3240	3240	4375
9.....	2542	2330	1637	1637	2296

Valores de M_2

Carga en el primer tramo

$$M_2 = \frac{b\ d\ l}{K} E_1$$

$$\frac{b\ d\ l}{K} = \frac{16377 \cdot 52370 \cdot 50}{109602 \cdot 10^9} = 0{,}000391$$

SECCION	E_1	M_2
1.....	2294	0,897
2.....	4371	1,709
3.....	6009	2,349
4.....	7161	2,800
5.....	7672	2,988
6.....	7347	2,873
7.....	6381	2,495
8.....	4729	1,849
9.....	2542	0,994

Carga en el segundo tramo

$$M_2 = \frac{d\ l}{K} (a\ E_2 - b\ F_2)$$

$$\frac{d\ l}{K} = \frac{52370 \cdot 50}{109602 \cdot 10^9} = 23 \cdot 891^{-9}$$

Sección	$aE_2 \cdot 10^{-7}$	$bF_2 \cdot 10^{-7}$	$(aE_2 - bF_2)\ 10^{-7}$	M_2
1.....	8570	3816	4754	1136
2.....	16962	7049	9913	2368
3.....	24627	9410	15217	3635
4.....	30820	10681	20139	4811
5.....	34605	10825	23780	5681
6.....	34145	9641	24504	5854
7.....	30082	7704	22378	5346
8.....	22533	5306	17227	4116
9.....	12198	2681	9517	2274

Valores de M_1

Carga en el primer tramo

$$M_1 = -\left(\frac{l}{a} E_1 + \frac{D_2}{a} M_2\right)$$

$$\frac{l}{a} = \frac{50}{52353} = 0{,}000955 \qquad \frac{D_2}{a} = \frac{16393}{52353} = 0{,}313$$

Sección	$\frac{l}{a} E_1$	$\frac{D_2}{a} M_2$	M_1
1.....	2157	0,281	2438
2.....	4106	0,535	4641
3.....	5637	0,735	6372
4.....	6704	0,876	7580
5.....	7158	0,935	8093
6.....	6839	0,899	7738
7.....	5857	0,781	6638
8.....	4245	0,579	4824
9.....	2123	0,311	2434

Carga en el segundo tramo

$$M_1 = -\left(\frac{l}{a} F_2 + \frac{D_2}{a} M_2\right)$$

$$\frac{l}{a} = 0{,}000955$$

$$\frac{D_2}{a} = 0{,}313$$

Sección	$\frac{l}{a} F_2$	$\frac{D_2}{a}$	M_1
1.....	2,225	—0,356	—1,869
2.....	4,110	—0,745	—3,369
3.....	5,487	—1,138	—4,349
4.....	6,229	—1,506	—4,723
5.....	6,313	—1,778	—4,535
6.....	5,622	—1,832	—3,790
7.....	4,492	—1,673	—2,819
8.....	3,094	—1,288	—1,806
9.....	1,563	—0,712	—0,851

Carga en el tercer y cuarto tramos

$$M_1 = - \frac{D_2}{a} M_2 \qquad \frac{D_2}{a} = 0{,}313$$

Sección	Tercer tramo M_1	Cuarto tramo M_1
1.....	0,712	0,281
2.....	1,288	0,535
3.....	1,673	0,735
4.....	1,832	0,876
5.....	1,778	0,935
6.....	1,506	0,899
7.....	1,138	0,781
8.....	0,741	0,579
9.....	0,356	0,311

(Continuará)