CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Podemos reemplazar C por este valor en la ecuacion (10), i la solucion jeneral de la ecuacion (9) será

$$y=e^{-\int \frac{Q}{P}dx}\left\{ C'-\int \frac{R}{P}\, e^{\int \frac{Q}{P}dx}\, dx \right\}$$

Aplicacion

Sea la ecuacion diferencial lineal

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=a\,x$$

Se considera, en primer lugar, la ecuacion

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=0$$

O bien

$$\frac{dy}{y}+\frac{x\,dx}{1-x^2}=0$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$Ly-\frac{1}{2}L(1-x^2)=LC$$

O bien

$$y=C\sqrt{1-x^2}$$

Al considerar ahora C como una funcion de x se obtiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}\sqrt{1-x^2}-\frac{Cx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luego

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=\frac{dC}{dx}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente, al comparar con la ecuacion propuesta, se tiene

$$\frac{dC}{dx}=ax\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$C=a\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C'$$

La solucion buscada es, por consiguiente,

$$y = a + C' \sqrt{1 - x^2}$$

Caso en que el primer miembro de la ecuacion diferencial es una diferencial exacta

Sea la ecuacion diferencial

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

Si el primer miembro es la diferencial exacta de una funcion u, se tiene idénticamente

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ahora, para que estas dos ecuaciones sean compatibles es necesario que se averigue la relacion

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

Luego se debe tener

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{11}$$

Recíprocamente, si esta última condicion es satisfecha, haî una funcion u de x, y cuya diferencial total es $M\,dx + N\,dy$.

En efecto, de la relacion

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M$$

se deduce

$$(12) \qquad u = \int M\, dx + \phi\,(y)$$

$\phi\,(y)$ es una funcion arbitraria de y. Para determinar esta funcion espresaremos que la derivada parcial de u respecto a y es igual a N, tendremos entónces

$$N = \frac{\partial}{\partial y} \int M\, dx + \phi'\,(y)$$

$$\phi'\,(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\, dx$$

El primer miembro es una funcion de la sola variable y, luego, para que el problema sea posible, es necesario que el segundo miembro sea independiente de x o que su derivada respecto a x sea idénticamente nula; esta derivada es

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

i la relacion (11) espresa precisamente que su valor es igual a cero. En resúmen, la condicion (11) es necesaria i suficiente para que $M\, dx + N\, dy$ sea la diferencial exacta de una funcion de x, y.

CAPÍTULO II

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ÓRDEN SUPERIOR

Ecuaciones lineales

Consideremos, en primer lugar, la ecuacion diferencial

$$(1) \qquad P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q$$

Si los coeficientes P_0, $P_1 \ldots\ldots P_{n-1}$, P_n i el segundo miembro Q son funciones de x solamente, la ecuacion (1) se llama ecuacion diferencial lineal de órden n.

Cuando se conoce una solucion de la ecuacion (1) se puede hacer desaparecer el segundo miembro. Sea, en efecto, y_1 una solucion de (1); hagamos

$$y = y_1 + z$$

Tendremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y_1}{dx^n} + \frac{d^n z}{dx^n}$$

Al sustituir estos valores en (1) los términos en y_1 desaparecen i se obtienen

$$(2) \qquad P_0 \frac{d^n z}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dz}{dx} + P_n z = 0$$

Es el primer miembro de (1) en el cual y ha sido reemplazado por z.

Sean ahora $z_1, z_2 \ldots, z_n$, n soluciones *distintas* de la ecuacion (2) hagamos

$$(3) \qquad z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n$$

Este valor de z será tambien una solucion de (2) cualesquiera que sean los valores de las constantes $C_1, C_2 \ldots C_n$.

En efecto si se lleva el valor (3) de z en la ecuacion (2), los términos multiplicados respectivamente por $C_1, C_2 \ldots C_n$ son separadamente nulos, porque $z_1, z_2 \ldots z_n$ son, por hipótesis, soluciones de la ecuacion (2).

Finalmente, la solucion de la ecuacion (1) será

$$(4) \qquad y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n$$

Como este valor de y contiene n constantes arbitrarias, la solucion así obtenida es la solucion jeneral de la ecuacion diferencial propuesta (1).

Recíprocamente, si n constantes figuran linealmente en una ecuacion tal como (4) se puede deducir de ella una ecuacion diferencial lineal de órden n, sin constantes.

En efecto, derivamos n veces la ecuacion (4) obtendremos

$$
(5) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx} + C_1 \dfrac{dz_1}{dx} + \ldots + C_n \dfrac{dz_n}{dx} \\
\vdots \\
\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_1 \dfrac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} + \ldots + C_n \dfrac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}} \\
\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d^n y_1}{dx^n} + C_1 \dfrac{d^n z_1}{dx^n} + \ldots + C_n \dfrac{d^n z_n}{dx^n}
\end{array} \right.
$$

Estas n ecuaciones, con la ecuacion (4), forman un sistema de $n+1$ ecuaciones en los cuales las n constantes figuran al primer grado; de las n primeras se deducirán los valores de las n constantes en funcion de y_1 $\dfrac{dy}{dx_1} \ldots \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, i la sustitucion en la última dará evidentemente una ecuacion diferencial lineal de órden n.

Si hubiera una relacion lineal entre $z_1\ z_2 \ldots z_n$ los valores de las n constantes, deducidas de la n primeras ecuaciones (4) i (5), serian indeterminadas o infinitas; en este caso las soluciones $z_1\ z_2 \ldots z_n$ no son soluciones distintas de la ecuacion sin segundo miembro.

Determinacion de una solucion particular de la ecuacion con segundo miembro cuando se conoce la solucion jeneral de la misma ecuacion sin segundo miembro.

Consideremos la ecuacion (1) i supongamos que

$$
(6) \qquad C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n
$$

sea la solucion jeneral de la ecuacion sin segundo miembro; podemos suponer que las n constantes $C_1\ C_2 \ldots C_n$ son funciones de x i determinar estas funciones de tal manera que el valor (6) de y satisfaga a la ecuacion propuesta (1). Es el *método de la variacion de las constantes arbitrarias.*

Tenemos aquí n funciones incógnitas las cuales deben satisfacer a una sola ecuacion, luego podemos establecer entre ellas $n-1$ relaciones arbitrarias.

Elejiremos estas relaciones de tal manera que las $n-1$ primeras derivadas de y tengan valores de la misma forma que los que se obtienen cuando $C_1\ C_2 \ldots . C_n$ son constantes.

Escribamos, para simplificar,

$$y = \Sigma\, C_p\, z_p$$

Tendremos

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma\, C_p \frac{dz_p}{dx} + \Sigma \frac{dC_p}{dx} z_p$$

La primera relacion que elejiremos es

$$\Sigma \frac{dC_p}{dx} z_p = 0$$

quedará por consiguiente

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma\, C_p \frac{dz_p}{dx}$$

Se ve que esta derivada tiene la misma forma como en el caso de $C_1\ C_2 \ldots . C_n$ constantes. Se tiene en seguida

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma\, C_p \frac{d^2z_p}{dx^2} + \Sigma \frac{dC_p}{dx} \quad \frac{dz_p}{dx}$$

Se elejirá como segunda relacion, la siguiente:

$$\Sigma \frac{dC_p}{dx} \frac{dz_p}{dx} = 0$$

I asi en seguida. En resúmen las $n-1$ relaciones arbitrarias que se establecen, entre las n funciones incógnitas C_1 $C_2 \ldots .$ C_n son

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \dfrac{dC_p}{dx} z_p = 0 \\ \\ \Sigma \dfrac{dC_p}{dx} \dfrac{dz_n}{dx} = 0 \\ \vdots \\ \Sigma \dfrac{dC_p}{dx} \dfrac{d^{n-1}z_p}{dx^{n-1}} = 0 \end{array} \right.$$

Se tendrá ademas

$$y = \Sigma\, C_p\, z_p$$

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma\, C_p \frac{dz_p}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma\, C_p \frac{d^2z_p}{dx^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{d^{n-1}x} = \Sigma\, C_p \frac{d^{n-1}z_p}{dx^{n-1}}$$

De esta última se deduce

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma\, C_p \frac{d^n z_p}{dx^n} + \Sigma \frac{dC_p}{dx} \quad \frac{d^{n-1} z_p}{dx^{n-1}}$$

Sustituimos los valores de estas n derivadas en la ecuacion (1), observaremos que los términos multiplicados respectivamente por las n constantes tienen separadamente una suma igual a cero porque $z_1\ z_2 \ldots . z_n$ son, por hipótesis, soluciones de la ecuacion sin segundo miembro; luego el resultado final de la sustitucion será

$$P_0\ \Sigma \frac{dC_p}{dx} \quad \frac{d^{n-1} z_p}{dx^{n-1}} = Q$$

Esta ecuacion i los $n-1$ relaciones (7) forman un sistema de n ecuaciones del primer grado entre las n incógnitas $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$, ... , $\frac{dC_n}{dx}$. Observaremos que los coeficientes de las incógnitas son precisamente los coeficiente de $C_1\ C_2 \ldots .$ C_n en las n primeras ecuaciones del sistema (4), (5); de suerte que si $z_1\ z_2 \ldots . z_n$ son realmente soluciones distintas de la ecuacion sin segundo miembro, las n ecuaciones serán siempre compatibles.

Se obtendrá, finalmente

$$\frac{dC_1}{dx} = f_1\ (x)$$

$$\frac{dC_2}{dx} = f_2\ (x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dC_n}{dx} = f_n\ (x)$$

Luego

$$C_1 = \int f_1(x)\,dx + C'_1$$

$$C_2 = \int f_2(x)\,dx + C'_2$$

$$\vdots$$

$$C_n = \int f_n(x)\,dx + C'_n$$

Pongamos

$$z_1 \int f_1(x)\,dx + z_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + z_n \int f_n(x)\,dx = F(x)$$

Tendremos, al llevar los valores obtenidos en (6),

$$(8) \qquad y = F(x) + C'_1 z_1 + C'_2 z_2 + \ldots + C'_n z_n$$

$F(x)$ es la solucion particular buscada, i el valor (8) de y es la solucion jeneral de la ecuacion diferencial (1).

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Sea la ecuacion

$$(9) \qquad A_0 \frac{d^n y}{dx_n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

en la cual los coeficientes A_0 $A_1 \ldots . A_n$ son constantes. Busquemos la condicion para que

$$(10) \qquad y = e^{ax}$$

sea una solucion. Tendremos

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

$$\frac{d^2y}{dx_3} = a^2 e^{ax}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^n e^{ax}$$

Al sustituir en la ecuacion (9) se obtiene

$$e^{ax}\left(A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \ldots . + A_{n-1} a + A_n\right) = 0$$

Luego el valor (10) de y será una solucion de la ecuacion diferencial si α es una raiz de la ecuacion

$$(11) \qquad \phi(\alpha) = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \ldots . + A_{n-1} a + A_n = 0$$

Si las raices de esta última ecuacion son distintas e iguales a a_1 $a_2 \ldots . a_n$, se obtendrán n soluciones distintas

$$e^{a_1 x},\ e^{a_2 x},\ \ldots .\ e^{a_n x}$$

i la solucion jeneral será

$$y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + \dots + C_n e^{a_n x}$$

Caso de las raices imajinarias

Cuando la ecuacion $\phi(\alpha) = 0$ tiene raices imajinarias, se puede dar a la solucion jeneral una forma real; sean en efecto $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$ dos raices imajinarias conjugadas, los términos correspondientes de la solucion jeneral sean

$$A e^{(a+bi)x} + B e^{(a-bi)x}$$

Pero esta espresion es igual a la siguiente:

$$e^{ax} \left\{ (A+B) \cos bx + (A-B) \sqrt{-1} \text{ sen } bx \right\}$$

i esta puede reemplazarse por

$$e^{ax} (M \cos + N \sin bx)$$

Se obtiene así una espresion sin imajinarias.

Caso de las raices iguales

Supongamos que p raices de la ecuacion $\phi(\alpha) = 0$ sean iguales, obtendremos solo $n - p + 1$ soluciones distintas de la ecuacion diferencial (9), luego es necesario obtener $p - 1$ nuevas soluciones.

Si, en el primer miembro de (9), se reemplaza y por e^{ax} se obtiene

$$A_0 \frac{d^n e^{ax}}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} e^{ax}}{dx^{n-1}} + \ldots .$$

$$\ldots . + A_{n-1} \frac{de^{ax}}{dx} + A_n e^{ax} = e^{ax} \phi (a)$$

i esta ecuacion averigua que, si a es una raiz de $\phi (a) = 0$, el valor $y = e^{ax}$ es una solucion de la ecuacion (9).

Derivamos la ecuacion anterior, respecto a a, tendremos de una manera jeneral

$$\frac{\partial \left(\frac{d^p e^{ax}}{dx_p} \right)}{\partial a} = \frac{d^p \frac{\partial \left(e^{ax} \right)}{\partial a}}{dx^p} = \frac{d^p \left(xe^{ax} \right)}{dx^p}$$

Luego

$$A_0 \frac{d^n \left(xe^{ax} \right)}{dx^n} + \ldots . + A_n xe^{ax} = xe^{ax} \phi (a) + e^{ax} \phi' (a)$$

Si a_1 es una raiz doble se tiene

$$\phi (a_1) = 0$$

$$\phi' (a_1) = 0$$

Luego xe^{a_1x} será una solucion de la ecuacion diferencial. Derivamos otra vez respecto de a, tendremos

$$A_0 \frac{d^n\left(x^2 e^{ax}\right)}{dx^n} + \ldots + A_n x^2 e^{ax}$$

$$= x^2 e^{ax} \phi(a) + 2x e^{ax} \phi'(a) + e^{ax} \phi''(a)$$

Si a_1 es una raiz triple, $\phi(a_1)$, $\phi'(a_1)$, $\phi''(a_1)$ son nulos, luego $x^2 e^{a_1x}$ es tambien una solucion de la ecuacion diferencial.

De la misma manera, si a_1 es una raiz de orden p, se tienen los p soluciones

$$e^{a_1x},\ x e^{a_1x},\ x^2 e^{a_1x}, \ldots,\ x^{p-1} e^{a_1x}$$

En resúmen, se obtienen siempre n soluciones distintas de la ecuacion diferencial.

Ecuaciones con coeficientes constantes i segundo miembro

Se determinará en primer lugar la solucion jeneral de la ecuacion sin segundo miembro i se aplicará en seguida el método de la variacion de las constantes arbitrarias.

Sin embargo, en algunos casos, se puede obtener directamente una solucion particular de la ecuacion con segundo miembro.

1.° *Cuando el segundo miembro es un polígono entero.*

Sea por ejemplo la ecuacion

$$(12) \quad A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m$$

Se pondrá

$$y = C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \ldots + C_m$$

Al sustituir este valor de y en el primer miembro de (12) se obtendrá un polígono entero de grado m; bastará entónces identificar los coeficientes de las potencias iguales en los dos miembros i se obtendrán $m+1$ ecuaciones entre las $m+1$ incógnitas $C_0\ C_1 \ldots C_m$. La solucion particular estará por consiguiente determinada.

2.° *Cuando el segundo miembro tiene la forma* $k\,e^{\beta x}$.

Pongamos en efecto

$$y = m\,e^{\beta x}$$

la sustitucion en el primer miembro dará

$$m\,e^{\beta x}\,\phi(\beta)$$

Luego m estará determinado por la ecuacion

$$m\,\phi(\beta) = k$$

Sin embargo, el método no se puede aplicar cuando

$$\phi(\beta) = 0$$

es decir cuando $e^{\beta x}$ es una solucion de la ecuacion sin segundo miembro. En este caso se deberá emplear el método de la variacion de las constantes arbitrarias.

APLICACIONES

I. En la teoría del péndulo se obtiene entre el ángulo de oscilacion y i el tiempo x una ecuacion de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$$

Es una ecuacion lineal con coeficientes constantes; i sin segundo miembro; para resolverla se pone

$$y=e^{ax}$$

i la ecuacion en a es

$$a^2+k^2=0$$

Luego

$$a=\pm k\sqrt{-1}$$

Las raices son imajinarias, luego la solucion jeneral es

$$y=M\cos kx+N\sin kx$$

II. En los *galvanómetros aperiódicos*, la ecuacion diferencial del movimiento dé la aguja contiene un término proporcional a la velocidad angular i tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+k^2y=k^2y_0$$

y_0 es la desviacion de la aguja cuando ella está en reposo. Una solucion particular de esta ecuacion con segundo miembro es evidentemente

$$y = y_0$$

Ahora, para integrar la ecuacion sin segundo miembro se debe considerar la ecuacion

$$\alpha^2 + 2a\alpha + k^2 = 0$$

Las raices son

$$\alpha_1 = -a + \sqrt{a^2 - k^2}$$

$$\alpha_2 = -a - \sqrt{a^2 - k^2}$$

Luego la solucion jeneral de la ecuacion es

$$y = y_0 + Ae^{\alpha_1 x} + Be^{\alpha_2 x}$$

Se deben distinguir dos casos:

1.° $a < k$; las raices α_1 α_2 son imajinarias i se puede escribir:

$$\sqrt{a^2 - k^2} = b\sqrt{-1}$$

Luego

$$y = y_0 + e^{-ax}\left(M \cos bx + N \operatorname{sen} bx\right)$$

El movimiento de la aguja es entónces oscilatorio, pero la amplitud de la oscilacion disminuye a medida que el tiempo aumenta.

2.° $a > k$; las raices α_1 α_2 son reales i se puede escribir

$$\sqrt{a^2 - k^2} = c$$

Luego

$$y = y_0 + e^{-ax}\left(Ae^{cx} + Be^{-cx}\right)$$

El movimiento de la aguja deja de ser periódico; es precisamente el caso de los galvanómetros *aperiódicos*.

Si a estuviera igual a k las dos raices α_1 α_2 serian iguales i la solucion jeneral seria

$$y = y_0 + Pe^{-ax} + Qxe^{-ax}$$

O bien

$$y = y_0 + e^{-ax}\left(P + Qx\right)$$

Integracion de algunas ecuaciones diferenciales no lineales

Cuando una ecuacion diferencial no lineal es de órden superior al primero, se debe tratar de rebajar su órden. Esto es siempre posible cuando una sola variable figura esplícitamente en la ecuacion diferencial.

Sea, por ejemplo, la ecuacion de segundo órden

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

Se hace

$$\frac{dy}{dx}=p$$

i se obtiene

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0$$

Es una ecuacion de primer órden entre p i x; si ésta se puede integrar se obtendrá

$$p=\phi(x, C)$$

i, en seguida

$$dy=\phi(x, C)\, dx$$

Luego

$$y=\int\phi(x, C)\, dx+C'$$

Este valor de y es la solucion jeneral de la ecuacion diferencial, en efecto ella contiene dos constantes arbitrarias.

Sea, ahora, la ecuacion

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

Se hará todavia

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

La sustitucion da

$$f\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Es una ecuacion diferencial de primer órden entre y, p. Si ella se puede integrar se obtendrá

$$p = \phi\,(y, C).$$

Luego se tendrá

$$\frac{dy}{dx} = \phi\,(y, C)$$

$$x = \int \frac{dy}{\phi\,(y, C)} + C'$$

Es la solucion jeneral de la ecuacion propuesta.

PROBLEMA I

Curvas cuyo radio de curvatura es proporcional al cubo de la normal

Como la lonjitud de la normal es

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

la ecuacion diferencial de las curvas buscadas es

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{n}\, y^3 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

O simplemente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n}{y^3}$$

No figura la variable x, luego se pondrá

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\, \frac{dp}{dy}$$

i se obtiene

$$p\,d\,p = \frac{n\,dy}{y^3}$$

La integracion da

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{n}{2}\,\frac{1}{y^2} + \frac{C}{2}$$

O bien

$$p^2 = \frac{Cy^2 - n}{y^2}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{Cy^2 - n}}{y}$$

O bien

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{Cy^2 - n}} = dx$$

La integral es

$$\frac{1}{C}\sqrt{Cy^2 - n} = x + C'$$

O bien

$$C^2\,(x + C')^2 - Cy^2 = n$$

Es la ecuacion jeneral de las cónicas que tienen el eje OX como eje de simetria.

PROBLEMA II

Curvas cuyo radio de curvatura es proporcional a la normal

La ecuacion diferencial del problema es ahora

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = n\,y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

O bien

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{n\,y}$$

Haremos todavía la sustitucion

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$$

i se obtendrá

$$\frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{ny}$$

La integral es

$$\frac{1}{2} L(1+p^2) = \frac{1}{n}(Ly - La)$$

O bien

$$1+p^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{n}}$$

De aquí se deduce

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}$$

O bien

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}}$$

1.° Sea $n = -1$, se tendrá

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Luego

$$x + c = -\sqrt{a^2 - y^2}$$

O bien

$$y^2 + (x+c)^2 = a^2$$

Es una circunferencia cuyo centro está sobre OX.

2.° Sea $n = +1$, se tendrá

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}}$$

Luego

$$x + c = a\,L\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}\right)$$

O bien

$$\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = e^{\frac{x+c}{a}}$$

De aquí se deduce

$$\frac{y}{a} - \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = e^{-\frac{x+c}{a}}$$

Luego

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c}{a}} + e^{-\frac{x+c}{a}}\right)$$

Es la ecuacion de una *catenaria*

3.° Sea todavia $n = 2$, se tendrá

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{a} - 1}}$$

Luego

$$x+c=2a\sqrt{\frac{y}{a}-1}$$

O bien

$$y=a+\frac{(x+c)^2}{4a}$$

Es la ecuacion de una parábola

CAPÍTULO III

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES ENTRE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCION

Ecuaciones lineales sin segundo miembro entre dos variables

Sea, en primer lugar, la ecuacion

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{1}$$

P, Q son dos funciones conocidas de x, y i se trata de determinar la funcion F de x, y que satisface a esta ecuacion.

En jeometría, la ecuacion (1) significa que los cosenos directores de la tanjente, en cada punto de la curva $F(x, y)=C$ son proporcionales a P i Q, luego la ecuacion diferencial de una cualquiera de estas curvas es

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q} \tag{2}$$

Es una ecuacion diferencial de primer órden cuya solucion jeneral tiene la forma

$$f(x, y, C)=0$$

De aquí se puede deducir

$$C=\phi(x, y)$$

La funcion ϕ satisface a la ecuacion (1); en efecto, se tiene en primer lugar,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx+\frac{\partial \phi}{\partial y} dy=0$$

Esta ecuacion debe ser idéntica a (2), puesto que ella no contiene ninguna constante arbitraria, luego se tendrá tambien idénticamente

$$P \frac{\partial \phi}{\partial x}+Q \frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \tag{3}$$

Esto demuestra que la funcion ϕ satisface a la ecuacion (1). Ahora una funcion cualquiera de ϕ satisfará tambien; en efecto, sea

$$F=\psi(\phi) \tag{4}$$

Se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \psi'(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi'(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Luego

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = \psi'(\phi)\left\{P\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \phi}{\partial y}\right\}$$

O bien, segun (3),

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Recíprocamente, toda solucion de la ecuacion (1) es una funcion de ϕ.

En efecto una solucion cualquiera de la ecuacion (1) podrá siempre escribirse bajo la forma

$$F(\phi, x)$$

Designemos los derivados parciales de esta funcion, respecto de ϕ i x, por F'_{ϕ}, F'_{x} tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + F'_{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F'_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Luego

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = F'_{\phi} \left(P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + P F'_{x}$$

Como F es, por hipótesis, una solucion de (1), el primer miembro es nulo; ademas, segun (3), el primer término del segundo miembro es nulo, luego se tiene tambien

$$F'_{x} = 0$$

Esto demuestra que F no contiene x i que, por consiguiente toda solucion de (1) es una funcion de ϕ.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Se formará la ecuacion diferencial

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

cuya solucion jeneral es

$$y = Cx$$

La funcion ϕ es igual, en este caso, a $\frac{y}{x}$ luego la solucion de la ecuacion propuesta es

$$F = \psi \left(\frac{y}{x} \right)$$

Se tiene, en efecto,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{y}{x^2} \psi'$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} \psi'$$

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Ecuaciones lineales sin segundo miembro entre tres variables

Sea la ecuacion

$$(5) \qquad P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

P, Q, R son funciones de las tres variables x, y z.

Sea $F(x\,y\,z)$ la funcion buscada; la ecuacion $F(x\,y\,z) = C$ representará una superficie en cada punto, de la cual, la normal es perpendicular a la direccion P, Q, R; luego, si se considera una curva definida por las ecuaciones diferenciales

$$(6) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

esta curva estará situada sobre una de las superficies $F(x\,y\,z) = C$.

Si se pueden integrar las ecuaciones (6) se obtendrán dos ecuaciones con dos constantes arbitrarias, i estas ecuaciones podrán escribirse

$$C_1 = \phi_1 \ (x\ y\ z)$$

$$C_2 = \phi_2 \ (x\ y\ z)$$

Cada una de las funciones ϕ_1, ϕ_2 es una solucion de la ecuacion (5).

Se tiene en efecto

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\, dz = 0$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\, dz = 0$$

Estas dos ecuaciones deben ser idénticas a (6) puesto que, en ellas, no figura ninguna constante arbitraria, luego se deberá tambien tener idénticamente

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} + Q \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} + R \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \\[2ex] P \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} + Q \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} + R \dfrac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Lo que demuestra la proposicion.

Ahora, cualquiera funcion de ϕ_1, ϕ_2 es tambien una solucion; en efecto, sea

$$F = \psi \ (\phi_1 \ \phi_2)$$

Se tendrá

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$$

Luego, segun (7),

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Recíprocamente, toda solucion de (5) es una funcion de ϕ_1, ϕ_2; en efecto una solucion cualquiera de (5) puede siempre ponerse bajo la forma

$$F(\phi_1\ \phi_2\ x) = 0$$

i se demuestra, como mas arriba, que la derivada parcial de F respecto de x es igual a cero.

A. OBRECHT

(Continuará)